

Г.Е. ШИЛОВ

ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

(Методическое пособие)

Выпуск 2.

М Г У - 1974 г.

ны, следовательно, и дифференцируемым отображением.

Нас интересует обращение отображения, не являющегося линейным, и без специального предположения о его взаимной однозначности. Оказывается, что в этом общем случае, если нам нужна обратимость отображения $x = \varphi(y)$ лишь локальная, в окрестности данной точки $b \in Y$ вопрос можно свести к обратимости линейного отображения $\varphi'(b)$: именно, если функция $\varphi(y)$ дифференцируема и линейный оператор $\varphi'(b)$ — производная φ в точке b — обратим, то в некоторой окрестности точки $a = \varphi(b)$ действительно существует, и притом единственная, непрерывная и дифференцируемая функция $f(x)$ такая, что $f[\varphi(y)] = y$, $\varphi[f(x)] = x$. (2.17) Но справедлива и более общая теорема, в которой идет речь о разрешимости не специального уравнения $x - \varphi(y) = 0$, а значительно более общего уравнения $\Phi(x, y) = 0$.

2.12. Теорема о неявной функции. Пусть заданы метрическое пространство M и полное нормированное пространство Y ; пусть на произведении M и шара $V_r = \{y \in Y : |y - b| \leq r\}$ задана функция $z = \Phi(x, y)$, отображающая $M \times V_r$ в нормированное пространство Z , ограниченная, равномерно непрерывная и обладающая ограниченной и равномерно непрерывной производной $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$. Пусть далее для некоторого $a \in M$ имеем $\Phi(a, b) = 0$ и оператор $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} (y \rightarrow Z)$ обратим. Тогда существует шар $U_\delta = \{x \in M : \rho(x, a) \leq \delta\}$ и функция $y = f(x) : U_\delta \rightarrow V_r$, определенная и непрерывная в шаре U_δ , такая, что $f(a) = b$ и $\Phi(x, f(x)) \equiv 0$ при всех $x \in U_\delta$. Эта функция $f(x)$ единственна в следующем смысле: для любой другой функции $f_1(x)$ с значениями в Y , определенной и непрерывной в окрестности точки $a \in M$ и такой, что $f_1(a) = b$ и $\Phi(x, f_1(x)) = 0$, имеется шар $\{x \in M, \rho(x, a) \leq \delta'\}$, в котором $f_1(x) \equiv f(x)$. Эта функция $y = f(x)$ называется неявной функцией, определяемой уравнением $\Phi(x, y) = 0$ и условием $f(a) = b$.

Доказательство. Мы будем искать функцию $f(x)$ как неподвижную точку отображения F пространства $Y(U_\delta)$ (всех непрерывных ограниченных функций $y(x)$ с значениями в Y в себя, задаваемого формулой

$$F[y(x)] = \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} y(x) - \Phi(x, y(x)) \right] \quad (1)$$

Если $y(x) = f(x)$ есть искомая функция, то $\Phi(x, y(x)) \equiv 0$ и равенство (1) дает нам $Ff(x) = f(x)$, т.е. $y(x)$ есть неподвижная точка отображения (1). Обратно, если $y(x)$ есть неподвижная точка отображения (1), так что

$$F[y(x)] = y(x) - \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \Phi(x, y(x)) = y(x) \quad (2)$$

то, как легко видеть, и $\Phi(x, y(x)) \equiv 0$, так что задача о неявной функции действительно приводится к задаче о неподвижной точке для оператора (1).

Как можно было бы прийти к определению (1)? В отображении $F(y)$ должна участвовать, естественно, функция $f(x)$ (как независимое переменное, аргумент отображения), и выражение $\Phi(x, f(x))$, которое на искомой функции должно обратиться в нуль. Комбинация $f(x) - \Phi(x, f(x))$ формально обращающаяся в $f(x)$ на искомой функции, непригодна, так как значения $f(x)$ лежат в Y , а значения $\Phi(x, f(x))$ — в Z . Поэтому нужно добавить у первого слагаемого множитель — оператор, переводящий Y в Z . Таким оператором является $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y}$. Теперь комбинация $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} f(x) - \Phi(x, f(x))$ имеет смысл; но ее значения лежат в Z , а не в Y , где должны находиться значения $f(x)$; поэтому еще нужно наложить на нее оператор, переводящий Z в Y . Таковым является $\left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1}$, и мы приходим к формуле (1).

Величина δ еще не определена. Возьмем какое-нибудь $\delta > 0$ и рассмотрим нормированное пространство $Y(U_\delta)$ всех ограниченных непрерывных функций $y(x)$ с значениями в пространстве Y (ср. I.48) и нормой $\|y(x)\| = \sup_{x \in U_\delta} |y(x)|_Y$. Пространство $Y(U_\delta)$ полно (I.16a). Через $V_\tau(U_\delta)$ обозначим совокупность тех функций $y(x) \in Y(U_\delta)$, все значения которых при $x \in U_\delta$ лежат в шаре $V_\tau \subset Y$; совокупность $V_\tau(U_\delta)$ есть замкнутый шар в пространстве $Y(U_\delta)$, радиуса τ , с

центром в точке $\vartheta(x) = \vartheta$, и поэтому сама является полным метрическим пространством. Отображение (2) определено для всех $y(x) \in V_r(\mathcal{U}_\delta)$ и принимает значения в пространстве $\mathcal{Y}(\mathcal{U}_\delta)$. В силу предположений о функции $\Phi(x, y)$ и результатов I.16д и I.48, отображение F является в шаре $V_r(\mathcal{U}_\delta)$ непрерывным и дифференцируемым. Его производную по I.48 и I.31-I.32, можно записать в виде

$$\begin{aligned} F'(y) &= E - \left[\frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y} = \\ &= E - \left[\frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right] - \\ &- \left[\frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} = - \left[\frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Для нормы $F'(y)$ получается следующая оценка:

$$\|F'(y)\| \leq \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \cdot \sup_{x \in \mathcal{U}_\delta} \left\| \frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right\| \quad (3)$$

Используя непрерывность функции $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$ при $x=a, y=\vartheta$, мы можем найти такие δ_1 и ρ , что при $|x-a| \leq \delta_1$, $|y-\vartheta| \leq \rho$ правая часть в (3) станет меньше $\frac{1}{2}$.
Итак, в $V_\rho(\mathcal{U}_{\delta_1})$ имеем $\|F'(y)\| \leq \frac{1}{2}$.

Далее заметим, что для $\vartheta(x) \equiv \vartheta$

$$F[\vartheta(x)] - \vartheta(x) = - \left[\frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right]^{-1} \Phi(x, \vartheta)$$

и следовательно,

$$\|F[\vartheta(x)] - \vartheta(x)\| \leq \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a, \vartheta)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \cdot \sup_{x \in \mathcal{U}_\delta} |\Phi(x, \vartheta)|$$

Так как $\Phi(a, \vartheta) = 0$ и функция $\Phi(x, y)$ непрерывна в точке $x=a, y=\vartheta$, то при выбранном уже ρ можно найти такое δ_2 , что будет

$$\|F[f(x)] - f(x)\|_{Y(U_{\delta_2})} \leq \frac{1}{2} \rho$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$; тогда для отображения $F(y)$, рассматриваемого в шаре $V_\rho(U_\delta)$, будут выполнены предположения теоремы 1.43е. Применяя эту теорему, мы получаем существование в шаре $V_\rho(U_\delta)$ неподвижной точки преобразования $F(y)$. Обозначим ее через $f(x)$; для нее выполняется равенство (I), а, следовательно, и равенство $\Phi(x, f(x)) = 0$ для $x \in U_\delta$. Нам нужно еще показать, что $f(a) = b$. Заметим, что из $y(a) = b$ следует очевидно, что и $Fy(a) = b$. Теперь напомним, что неподвижная точка сжимающего отображения строится как предел итераций y_0, Fy_0, F^2y_0, \dots (013.22), где y_0 — любая точка рассматриваемого полного метрического пространства. Возьмем в качестве начальной точки итерационного процесса какую-либо функцию $y(x) \in V_\rho(U_\delta)$, $y(a) = b$, хотя бы функцию $y(x) = b$; тогда для всех функций, получающихся в процессе итераций также будет выполнено свойство $y(a) = b$; следовательно, этим же свойством будет обладать и предельная функция $f(x)$ — искомая неподвижная точка преобразования $F(y)$, что нам и требуется.

Нам остается доказать единственность найденного решения. Заметим, что тождество $F(f(x)) = f(x)$, полученное для точек из шара U_δ , верно и на любом меньшем шаре $U_{\delta'}$ ($\delta' < \delta$), поэтому сужение функции $f(x)$ на этот меньший шар является неподвижной точкой преобразования $F(y)$ и в шаре $V_\rho(U_{\delta'})$. Пусть $f_1(x)$ — какое-либо другое решение задачи о неявной функции; во всяком случае, существует такое $\delta' < \delta$, что в шаре $U_{\delta'}$ функция $f_1(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию $|f_1(x) - b| \leq \rho$, т.е. лежит в шаре $V_\rho(U_{\delta'})$. Но так как у преобразования $F(y)$ в шаре $V_\rho(U_{\delta'})$ может быть лишь единственная неподвижная точка, то при $x \in U_{\delta'}$ получаем $f_1(x) \equiv f(x)$, что и требуется. Теорема доказана.

2.13а. Теорема о неявной функции 2.12 носит локальный характер, т.е. существование функции $y(x)$, являющейся решением уравнения $\Phi(x, y) = 0$, гарантируется лишь в некоторой окрестности точки a с известным значением $b = y(a)$. Было

бы желательно указать область существования функции $y(x)$ более определенным образом. Например, пусть известно, что функция $\Phi(x, y)$ определена, непрерывна и дифференцируема по y при всех $x \in M, y \in Y$, причем $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$ также всюду существует, непрерывна и обратима; спрашивается, если $\Phi(a, b) = 0$, то будет ли определена соответствующая неявная функция $y(x)$ (существование которой обеспечивается теоремой о неявной функции лишь в некотором шаре $|x - a| < \delta'$), если и не для всех $x \in M$, то хотя бы в шаре $|x - a| < \tau$, где τ — фиксированное положительное число, не зависящее от выбора функции $\Phi(x, y)$?

Оказывается, даже и в такой, казалось бы, весьма выгодной ситуации ответ приходится дать отрицательный. Мы укажем сейчас для любого $\varepsilon > 0$ такую функцию $\Phi_\varepsilon(x, y)$ ($R_2 \rightarrow R_1$), которая будет определена, непрерывна и дифференцируема по y при всех $\{x, y\} \in R_2$ и ее производная по y всюду непрерывна и обратима; при этом $\Phi_\varepsilon(0, 0) = 0$. Однако интервал $-h < x < h$ будет интервалом существования соответствующей неявной функции лишь при $h < \varepsilon$. А именно, положим $\Phi_\varepsilon(x, y) = x + \varepsilon - \varepsilon e^y$. Все высказанные условия для функции $\Phi_\varepsilon(x, y)$ очевидным образом выполняются, однако соответствующая неявная функция

$$y = \ln \frac{x + \varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{определена лишь при } x > -\varepsilon$$

б. В дополнение к сказанному в а относительно области существования неявной функции укажем на значительно более удовлетворительную ситуацию, имеющую место по отношению к единственности неявной функции.

Пусть метрическое пространство M связно, т.е. в нем нет (истинного) подмножества, являющегося одновременно замкнутым и открытым. Пусть на M заданы две непрерывные функции $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$, $f(a) = f_1(a) = b$, каждая из которых удовлетворяет уравнению $\Phi(x, y) = 0$. Тогда, если в каждой точке $\{x, f(x)\} \in M \times Y$ выполнены условия теоремы о неявной функции, то $f(x) = f_1(x)$ всюду на M .

Действительно, пусть $B = \{x \in M : f(x) = f_1(x)\}$. Множество B замкнуто, как множество нулей непрерывной функции

$f_1(x) - f(x)$ (05.140); в то же время оно и открыто, так как по теореме о неявной функции содержит вместе со всякой точкой некоторую ее окрестность. Оно содержит точку a , так что не является пустым; следовательно, так как пространство M связно, мы имеем $B = M$, что и требовалось.

2.14. Теорема о производной неявной функции. Далее будем предполагать, что метрическое пространство M , о котором шла речь в 2.12-2.13, является областью в некотором нормированном пространстве X .

а. Теорема. Если выполняются условия теоремы 2.12 и, кроме того, функция $\Phi(x, y)$ дифференцируема в точке (a, b) (по пространству $X \times Y$), то построенная в 2.12 неявная функция $y = f(x)$ дифференцируема при $x = a$ и

$$f'(a) = - \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial x} \quad (1)$$

Доказательство. Поскольку при $x = a$, $y = b$ функция $\Phi(x, y)$ дифференцируема, мы можем написать для достаточно малого Δx

$$0 = \Phi(a + \Delta x, f(a + \Delta x)) = \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|)$$

где $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Отсюда

$$\left| \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial x} \Delta x + \Delta y \right| \leq \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \cdot |o(|\Delta x| + |\Delta y|)| \quad (2)$$

Допустим, что Δx , и, следовательно, Δy , настолько малы, что

$$\left\| \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \cdot |o(|\Delta x| + |\Delta y|)| \leq \frac{1}{2} (|\Delta x| + |\Delta y|)$$

Тогда мы имеем

$$|\Delta y| \leq \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \cdot \left| \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial x} \Delta x \right| + \frac{1}{2} (|\Delta x| + |\Delta y|) \leq$$

$$\leq \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial x} \right\| \cdot |\Delta x| + \frac{1}{2} |\Delta x| + \frac{1}{2} |\Delta y|,$$

откуда

$$\frac{1}{2} |\Delta y| \leq \left(\frac{1}{2} + \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y} \right]^{-1} \left\| \left\| \frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial x} \right\| \right) |\Delta x|,$$

т.е. $|\Delta y| \leq C |\Delta x|$ при некотором $C > 0$; далее, подставляя эту оценку в неравенство (2), получаем

$$\left| \Delta y - \left(- \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial x} \Delta x \right) \right| \leq \left\| \left[\frac{\partial \Phi(a,b)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| o((C+1)|\Delta x|) = o(|\Delta x|)$$

а это означает, что функция $f(x)$ дифференцируема при $x = a$ и имеет место формула (1), что и требовалось.

б. В силу 1.47, для дифференцируемости функции $\Phi(x, y)$ в точке (a, b) достаточно - при выполнении остальных условий 2.12 - чтобы в окрестности точки (a, b) существовала непрерывная производная $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}$. При этом предположении функция $\Phi(x, y)$ будет дифференцируемой не только в точке (a, b) , но и в ее окрестности; неявная функция $y = f(x)$, построенная в 2.12, будет также дифференцируема в окрестности точки $x = a$, и ее производная, вычисляемая по формуле, аналогичной формуле (1)

$$f'(x) = - \left[\frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial x} \quad (3)$$

будет непрерывной функцией в окрестности точки $x = a$.

Применяя к обеим частям формулы (3) оператор $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$ мы можем записать ее в эквивалентном виде

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \cdot y'(x) + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Формула (4) показывает, что в условиях теоремы для нахождения $y'(x)$ можно равенство $\Phi(x, y(x)) = 0$ дифференцировать по x , как сложную функцию от x .

2.15. Случай числовой функции. Если в условии теоремы 2.12 $z = \Phi(x, y)$ есть числовая функция аргумента $x \in M \subset X$ и вещественного аргумента $y \in F \subset R$, то оператор $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y}$ представляет собой умножение на число и его обратимость равносильна неравенству $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \neq 0$.

Величина производной $y'(a) (X \rightarrow R_1)$ в случае числовой функции может быть записана в виде

$$y'(a) = - \frac{\partial \Phi(a, b) / \partial x}{\partial \Phi(a, b) / \partial y}$$

2.16. Случай функции $\Phi(x, y): R_{n+m} \rightarrow R_m$. Здесь теорема о неявной функции 2.12 допускает координатную трактовку:

а. Теорема. Пусть имеется система функций

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ z_m &= f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

определенных в некоторой области пространства R_{n+m} . Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) Существует точка $\{a, b\} = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$ такая, что

$$\left. \begin{aligned} f_1(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) &= 0 \\ f_m(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) Существует окрестность W точки $\{a, b\}$, в которой определены и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_j}, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, m.$$

(3) В указанной окрестности точки $\{a, b\}$ якобиан матрицы

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array} \right\|$$

отличен от нуля.

Тогда существует окрестность U_δ точки $a \in R_n$ $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ и в ней система непрерывных функций

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_m &= y_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

такая, что

$$y_1(a_1, \dots, a_n) = b_1, \dots, y_m(a_1, \dots, a_n) = b_m, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) &= 0 \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Система функций с указанными свойствами может быть лишь единственной.

Если в дополнение к предыдущему известно, что в окрестности W существует и непрерывная производная

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

то функции y_1, \dots, y_m дифференцируемы при $x \in U$

$$y'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} = - \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] \quad (6)$$

2.17. Теорема об обратной функции.

а. Пусть $x = \varphi(y) : (F \subset Y) \rightarrow (E \subset X)$ — функция, дифференцируемая в некоторой окрестности точки $y = b \in Y$, причем оператор $\varphi'(y)$ непрерывен в точке $y = b$ и обратим. Пусть $\varphi(b) = a \in X$. Тогда существуют окрестность $V_\delta = \{x \in X \mid |x - a| < \delta\}$ и дифференцируемая функция $f : V_\delta \rightarrow Y$ такие, что $f[\varphi(y)] = y$ при всех $y \in F$, причем оператор $f'(x) (X \rightarrow Y)$ является обратным к оператору $\varphi'(y)$:

$$f'(x) = [\varphi'(y)]^{-1}, \quad \text{где } y = f(x)$$

Доказательство этой теоремы получается непосредственно из теоремы о неявной функции, если положить $\Phi(x, y) = x - \varphi(y)$

и заметить, что $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}$ есть единичный оператор,

$$2 \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = -\psi'(y).$$

б. Отображение $y = f(x) : G \subset X \rightarrow Y$ с непрерывной производной $f'(x)$ называется дiffeоморфизмом в G , если оно взаимно однозначно (с G на $f(G)$) и если естественно определенное обратное отображение $x = \varphi(y) : f(G) \rightarrow G$ также обладает непрерывной производной.

В силу а, достаточным условием того, чтобы отображение $y = f(x)$ с непрерывной производной $f'(x)$ было диффеоморфизмом в некоторой окрестности $V(a)$ точки $a \in G$, является обратимость оператора $f'(a)$. Это условие и необходимо, поскольку при наличии обратного дифференцируемого отображения $x = \varphi(y)$ по I.33а должны выполняться равенства

$$f'(a) \cdot \varphi'(b) = E_Y, \quad \varphi'(b) \cdot f'(a) = E_X \quad \text{и, следовательно, оператор } f'(a) \text{ обратим.}$$

Если имеется диффеоморфизм $y = f(x) : G \subset X \rightarrow Y$, то всякая дифференцируемая функция $z = \psi(x) : G \rightarrow Z$ может быть представлена, как дифференцируемая функция от $f(x)$; это вытекает из формулы

$$z = \psi(x) = \psi(\varphi(f(x))) = g(f(x)) \quad , \quad \text{где } g(y) = \psi(\varphi(y)).$$

в. Предположим, что в б пространства X и Y конечномерны. $X = R_n, Y = R_m$. Пусть в пространстве X выбраны координаты x_1, \dots, x_n , а в пространстве Y — координаты y_1, \dots, y_m . Отображение $y = f(x)$ аналитически может быть записано формулами вида

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, m)$$

Существование непрерывной производной $f'(x)$ в области G равносильно существованию и непрерывности в этой области всех производных $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ (I.25а). Пусть $m = n$ и матрица

Якоби $\left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|$ обратима; тем самым обратим и оператор

$f'(a)$. По б, отображение $y = f(x)$ есть диффеоморфизм некоторой окрестности $V(a)$ на некоторую окрестность $V(b)$ точки $b = f(a) \in Y$. Для каждой точки

$y = (y_1, \dots, y_n) \in V(b)$ найдется точка x
 $x = (x_1, \dots, x_n) \in U(a)$ такая, что $f(x) = y$. Поэтому
 числа y_1, \dots, y_n наравне с числами x_1, \dots, x_n , в принципе однозначно определяют положение точки x в области U .
 Таким образом, эти числа y_1, \dots, y_n могут служить новыми
координатами точки x .

Так, формулы

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (I)$$

определяют на плоскости x_1, x_2 новые координаты r, θ —
 полярные координаты (05.71). Так как

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

то числа r, θ могут быть взяты за новые координаты в
 окрестности любой точки, отличной от точки $r=0$ ($x=0, y=0$); в
 самой этой точке взаимная однозначность отображения (I) спешеч-
 ным образом нарушается.

Если имеется диффеоморфизм $y = f(x): G \subset R_n \rightarrow R_n$
 или

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, n),$$

то по θ всякая дифференцируемая функция $z = \psi(x): G \rightarrow R$
 может быть представлена, как дифференцируемая функция от $\{y\}$,
 т.е. от $f_1(x), \dots, f_n(x)$

$$z = \psi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

г. Пусть снова функции с непрерывными производными

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (I)$$

определяют в области $G \subset R_n$ новые координаты

$$\{y\} = \{y_1, \dots, y_n\}, \det \left\| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\| \neq 0 \text{ линия } L_j \text{ с уравнениями}$$

$$y_i = f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \quad i=1, \dots, n$$

называется j -й координатной линией системы $\{y\}$, проходя-
щей через точку a . Соответствующие направляющие векторы

$$g_j = \left\{ \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_j} \right\}, \quad j=1, \dots, n$$

линейно независимы; по определению они образуют местный базис системы координат $\{y\}$ в точке a . Любой вектор $\Xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ можно разложить и по векторам местного базиса:

$$\Xi = \sum_{j=1}^n \eta_j g_j. \quad (2)$$

Выражения составляющих η_j через Ξ можно получить следующим образом. Обозначим для краткости $p_{ij} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$

и пусть q_{ij} элементы обратной матрицы; тогда из равенств

$$g_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \quad \text{следует} \quad e_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} g_j \quad \text{и далее}$$

$\sum_{j=1}^n \eta_j g_j = \Xi = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i q_{ij} g_j$; откуда вследствие линейной независимости векторов g_j мы выводим, что

$$\eta_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \xi_i. \quad (3)$$

Аналогичные координатные линии проходят через любую точку x области G и в любой точке $x \in G$ можно построить соответствующий местный базис; следует только иметь в виду, что в отличие от фиксированного в R_n базиса e_1, \dots, e_n местный базис $\{g_i(x)\}$ вообще говоря изменяется вместе с x .

§ 2.2. Локальная структура дифференцируемой функции.

2.21. С теоремой о неявной функции тесно связан вопрос о локальной структуре функции $y = f(x): G \subset X \rightarrow Y$ класса C^1 .

Если в данной точке $a \in G$ оператор $f'(a)$ обратим, то функция $f(x)$ отображает некоторую окрестность точки a диффеоморфно на некоторую окрестность точки $b = f(a) \in Y$, как это следует из теоремы об обратной функции 2.17. Что происходит, если оператор $f'(a): X \rightarrow Y$ не является обратимым?

а. Чтобы поставить задачу правильно и предсказать результат, рассмотрим вначале линейное преобразование $y = Ax: R_n \rightarrow R_m$ определяемое (в каких-либо фиксированных базисах этих пространств) формулами

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, \dots, m) \quad (I)$$

Когда точка x пробегает R_n , вектор $y = Ax$ вообще говоря, не пробегает всего пространства R_m ; точным образом пространства R_n при отображении (I) является некоторое подпространство $\text{Im } A = R \subset R_m$ ^{xx/}. Прежде всего, естественно, возникает вопрос: какова размерность подпространства R ? Как его описать в координатах y_i ? Сюда же тесно примыкает другой вопрос. В одну точку образа $y = (y_1, \dots, y_m) \in R$ вообще говоря, отображается не одна точка $x \in R_n$, а целое множество точек, которое мы называли в 1.13 поверхностью уровня функции $f(x)$ и которое также называется полным прообразом точки y и обозначается $A^{-1}y$ ^{xx/}. Для точки $y=0$ множество $A^{-1}y$ есть некоторое подпространство $R_0 \subset X$, которое называется ядром отображения A и обозначается $\text{Ker } A$ ^{xxx/}. Для любой другой точки $y \in \text{Im } A$ полным прообразом служит сдвиг подпространства R_0 на некоторый вектор (в силу известной теоремы: общее решение неоднородной линейной системы есть сумма частного решения этой системы и общего решения однородной

^{xx/} Image - образ (англ.)

^{xx/} Это только обозначение. Оператор A^{-1} в описываемой ситуации, вообще говоря, не существует.

^{xxx/} Kernel - ядро (англ.)

системы). Таким образом, полные прообразы разных точек $\{$ системы $\}$ линейные многообразия одинаковой размерности. Спрашивается, какова эта размерность? Как описать эти линейные многообразия в координатах x_j ?

В линейной алгебре даются ответы на оба поставленных вопроса. Именно: подпространство $R = \text{Im } A$ порождается столбцами матрицы $A \equiv \|a_{ij}\|$; размерность подпространства R равна максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A , т.е. равна ее рангу. Подпространство $R_0 = \text{Ker } A$ есть пространство решений однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

Его размерность равна $n - r$, где r — ранг матрицы A . Пусть для определенности базисный минор матрицы A располагается в ее левом углу, занимая первые r строк и первые r столбцов. Тогда каждая строка матрицы A , начиная с $(r+1)$ -й, линейно выражается через предыдущие r строк, что может быть записано системой равенств

$$a_{sj} = c_{s1} a_{1j} + \dots + c_{sr} a_{rj}, \quad (s = r+1, \dots, m) \quad (3)$$

где постоянные c_{s1}, \dots, c_{sr} определены однозначно. Отсюда следует, что величины y_1, \dots, y_m связаны зависимостями

$$y_s = c_{s1} y_1 + \dots + c_{sr} y_r, \quad (s = r+1, \dots, m) \quad (4)$$

С другой стороны, если даны величины y_1, \dots, y_m , связанные зависимостями (4), то найдутся значения x_1, \dots, x_n удовлетворяющие, вместе с имеющимися y_i , соотношениям (1); для доказательства можно положить $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ и x_1, \dots, x_r определить из r первых уравнений системы (1); таким образом, имеющимися y_j и найденными x_i удовлетворяются первые r уравнений системы (1), а тогда, в силу формул (3), удовлетворятся и остальные $m - r$ уравнений. Таким образом, соотношения (4) дают полное описание подпространства $R \subset Y$. Уравнения (2) в свою очередь дают полное описание подпространства $R_0 \subset X$. Но можно записать их и в несколько ином виде, более полезном для дальнейшего, проведя разложение

относительно аргументов x_1, \dots, x_n . При этом достаточно разрешить по правилам Крамера первые r уравнений системы (2) - остальные будут выполняться автоматически. Мы получим формулы вида

$$x_j = B_{j,r+1} x_{r+1} + \dots + B_{j,n} x_n, \quad j=1, \dots, r \quad (5)$$

с однозначно определенными коэффициентами $B_{j,r+1}, \dots, B_{j,n}$.

б. Теперь поставим соответствующие вопросы для произвольной дифференцируемой функции $y = f(x)$, действующей из области $G \subset X = R_n$ в пространство $Y = R_m$. В координатной форме функция $y = f(x)$ записывается системой уравнений вида

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i=1, \dots, m)$$

где функции $f_i(x)$ определены, непрерывны и обладают непрерывными частными производными в области G . Мы ставим следующие вопросы. Какова размерность образа некоторой окрестности точки $a \in G$? Какими уравнениями в координатах y_i описывается этот образ? Какова размерность полного прообраза точки $b = f(a)$? Какими уравнениями в координатах x_j описывается этот прообраз? Размерность, о которой идет речь, мы понимаем в следующем смысле: будет показано, что искомое множество описывается с помощью некоторого числа C^1 функций от определенному числу независимых вещественных параметров; это-то число требуемых параметров мы и будем считать размерностью искомого множества.

Ответы на все эти вопросы мы дадим в предположении, что ранг матрицы Якоби

$$f'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

имеет постоянное значение r в некоторой окрестности U точки a .

Вообще говоря, ранг матрицы Якоби изменяется от точки к точке; если рассмотреть точку a_0 , в которой ранг матрицы

Якоби достигает максимального значения, положим α_0 , то по соображениям непрерывности минор порядка α_0 , отличный от нуля в точке α_0 , будет отличным от нуля и в некоторой ее окрестности. Таким образом, условие постоянства ранга в окрестности точки α для некоторых точек $\alpha \in G$ заведомо выполняется.

Без ограничения общности можно считать, что базисный минор матрицы $f'(x)$ при всех $x \in U$ располагается в ее левом верхнем углу, поскольку в самой точке α этого можно достигнуть, заново перенумеровав координаты в R_n и R_m , а из соображений непрерывности матрицы Якоби следует, что левый верхний минор остается базисным (т.е. его значение остается отличным от нуля) и в некоторой окрестности точки α .

Т е о р е м а о р а н г е . В указанных предположениях:

(1) Для некоторой окрестности $U \ni \alpha$ множество всех значений функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки $\beta = f(\alpha)$ описывается системой уравнений вида

$$y_s = \psi_s(y_1, \dots, y_r), \quad s = r+1, \dots, m,$$

с функциями $\psi_{r+1}, \dots, \psi_m$ класса C^1 и определяемыми таким образом, r свободными параметрами y_1, \dots, y_r .

(2) Существует такая окрестность V точки β , что в каждую точку множества $\Gamma_m \cap V$ отображается множество точек x , описываемое в пределах окрестности U системой уравнений вида

$$x_j = \varphi_j(x_{r+1}, \dots, x_n) \quad j = 1, \dots, r$$

где φ_j — функции класса C^1 ; оно определяется таким образом, $n - r$ свободными параметрами x_{r+1}, \dots, x_n .

Доказательство теоремы о ранге будет дано в 2.23.

2.22. А б с т р а к т н а я т е о р е м а о р а н г е .

Пусть X и Y — полные нормированные пространства,

представленные в виде прямых сумм замкнутых подпространств:

$X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$. Для всякого $x \in X$ и $y \in Y$ имеются однозначно определенные разложения $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$. Каждую функцию $y = f(x) : X \rightarrow Y$ можно записать эквивалентным образом в виде пары уравнений

$$y_1 = F_1(x) \equiv F_1(x_1, x_2) : X \rightarrow Y_1$$

$$y_2 = F_2(x) \equiv F_2(x_1, x_2) : X \rightarrow Y_2$$

Производной $f'(x)$ соответствует матрица из операторов

$$f'(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

где $\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}$ действует из X_j в Y_i ($i, j = 1, 2$).

Фиксируем точки $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2 = f(a) \in Y$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ — класса C^1 в области $G \subset X$, содержащей точку a , и удовлетворяет следующим условиям:

(1) из $F'_1(x)h = 0$ следует $F'_2(x)h = 0$

(2) $\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}$ есть обратимое отображение X_1 на Y_1 .

Тогда существуют такие окрестности $U(a) \subset X$, $V(b) \subset Y$, $W(a_2) \subset X_2$, что

(а) при $x \in U(a)$ и $y_1 \in V(b_1)$ график функции $y = f(x)$ может быть задан уравнением $y_2 = \psi(y_1)$;

(б) для каждого $y \in f(U)$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ для $x_2 \in W(a_2)$ может быть задан уравнением $x_1 = \varphi(x_2)$.

Здесь φ и ψ — функции, обладающие в указанных окрестностях непрерывными производными по своим аргументам.

Если для функции $y = f(x)$ выполняются условия теоремы для точки $(a, b) \in X \times Y$ (т.е. если существуют прямые разложения $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ со всеми указанными свойствами), то точка (a, b) называется обыкновенной точкой отображения $f(x)$; если же эти условия не выполняются (т.е. такие прямые разложения не существуют), то точка (a, b) называется особой точкой отображения $f(x)$. (Иногда в литературе название "особая точка", "обыкновенная точка" относят только к точке

$b \in Y$ — что, разумеется, не вполне правильно).

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию

$$\Phi(y_1, x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2) - y_1 \quad (b \in Y_1 \rightarrow Y_1)$$

Очевидно,

что $\Phi(b_1, a_1, a_2) = 0$, а оператор $\frac{\partial \Phi(b_1, a_1, a_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1(a_1)}{\partial x_1}$

$(X_1 \rightarrow Y_1)$ обратим. По теореме о неявной функции 2.12 существуют такие окрестности $U(b_1) \subset Y_1, W(a_2) \subset X_2, W(a_1) \subset X_1$

и такая функция $g(x_2, y_1) : W(a_2) \times V(b_1) \rightarrow W(a_1)$ имеющая непрерывные производные, что уравнение $F_1(x_1, x_2) - y_1 = 0$ эквивалентно уравнению $x_1 = g(x_2, y_1)$. Другими словами,

$$F_1(g(x_2, y_1), x_2) = y_1 \quad (1)$$

Положим $U(a) = W(a_1) \times W(a_2) \cap \{x : F_1(x) \in V(b_1)\}$

Теперь уравнение

$$y_2 = F_2(x_1, x_2)$$

при $x \in U(a)$ можно записать в виде

$$y_2 = F_2(g(x_2, y_1), x_2) \quad (2)$$

Покажем, что правая часть не зависит от x_2 . Дифференцируя (1) и (2) по x_2 , получаем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \quad (4)$$

Из (3) видно, что результат применения оператора $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1}$

к вектору $\left\{ \frac{\partial g}{\partial x_2} h_2, h_2 \right\}$ равен 0 при любом $h_2 \in X_2$. Но

тогда в силу предположения (1), и результат применения оператора $\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1}$ к этому же вектору равен 0; таким образом,

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{и правая часть (2) не зависит от } x_2. \text{ Поэтому}$$

уравнение (2) при $y_1 \in V(b_1)$ можно записать в виде

$$y_2 = \psi(y_1),$$

причем функция $\psi(y_1)$ имеет непрерывную производную, так как этим свойством обладают функции F_2 и g . Утверждение (а) доказано.

Рассмотрим теперь полный прообраз точки $y = \{y_1, y_2\} = f(x) \in f(U)$. Но если задано даже только значение y_1 , то в указанной выше окрестности $W(a_2) \times V(b_2)$ однозначно определяется по x_2 и величина $x_1 = g(x_2, y_1)$, которая при фиксированном y_1 представляет собой функцию от $x_2 \in W(a_2)$, обладающую непрерывной производной.

Теорема доказана.

2.23а. Доказательство теоремы о ранге.

В условии этой теоремы была задана C^1 функция $y = f(x)$ ($G \subset R_n \rightarrow R_m$), или в координатной форме

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, m)$$

Было предположено, что ранг матрицы Якоби

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

равен постоянному числу r в окрестности U точки $a \in R_n$ и что базисный минор этой матрицы располагается в ее первых r строках и первых r столбцах.

Мы получим теорему о ранге как следствие из 2.22. Положим в 2.22 $X = R_n$, $Y = R_m$. Далее определим подпространство $Y_1 \subset Y = R_m$ первыми r базисными векторами пространства R_m , а подпространство Y_2 — последними $m - r$ базисными векторами. Тогда равенство $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x} h = 0$ равносильно системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j = 0 \quad (i=1, \dots, r) \quad (1)$$

а равенство $\frac{\partial F_2(x)}{\partial x} h = 0$ — системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j = 0 \quad (i=r+1, \dots, m) \quad (2)$$

Но так как строки матрицы $f'(x)$, начиная с $(r+1)$ -й, линейно зависят от предыдущих, равенства (2) оказываются следствиями равенств (1). Таким образом, выполнена предпосылка (1)

теоремы 2.22. Определим далее подпространство $X_1 \subset X = R_n$ первыми r базисными векторами пространства R_n и подпространство X_2 — последними $n-r$ базисными векторами. Тогда оператор $\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}$ задается матрицей

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{array} \right\|$$

с определителем, отличным от нуля, и, следовательно, обратим; таким образом, выполнена и предпосылка (2) теоремы 2.22. Нам остается сформулировать результат этой теоремы для данного случая. Он гласит: существуют такие окрестности $V(a) \subset R_n$, $V(b_1) \subset Y_1 = R_r$, $W(a_2) \subset X_2 = R_{n-r}$, что при $x \in U(a)$ и $(y_1, \dots, y_r) \in V(b_1)$ гомограф функции $y = f(x)$ может быть задан уравнениями

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_m = \varphi_m(y_1, \dots, y_r);$$

для каждого $y \in f(U)$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ при $\{x_{r+1}, \dots, x_n\} \in W(a_2)$ может быть задан уравнениями

$$x_1 = \psi_1(x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, x_r = \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

где ψ_i и φ_j — функции, обладающие в указанных окрестностях непрерывными производными по своим аргументам.

Но это и есть требуемые утверждения теоремы 2.21; таким образом, она оказывается полностью доказанной.

б. Известное из линейной алгебры понятие линейной зависимости векторов (числовых строк, линейных форм и пр.) может быть обобщено на функции следующим образом.

Пусть в области $G \subset R_n$ определена C^1 функция $y = f(x) : G \rightarrow R_m$, так что все составляющие

$$y_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

обладают непрерывными частными производными по x_1, \dots, x_n .

Предположим далее, что ранг r матрицы Якоби

$$f'(x) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

постоянен в области G . Если при этом $r=m$, функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ называются функционально независимыми в G ; если $r < m$, функции эти называются функционально зависимыми в G . Теорема о ранге 2.21 позволяет дать описание геометрических свойств независимых и зависимых функций.

Теорема. Если функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ функционально зависимы в G , то существует у каждой точки $a \in G$ такая окрестность $U(a)$ и такая C^1 функция $F(y_1, \dots, y_m)$, определенная в некоторой окрестности точки $b = f(a) \in R_m$ итд. $\text{grad } F(b) \neq 0$ и

$$F[f_1(x), \dots, f_m(x)] \equiv 0 \quad \text{в } U(a) \quad (4)$$

Если функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ функционально независимы в G , то ни у какой точки $a \in G$ окрестности с описанными свойствами не существует.

Доказательство. Если функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ зависимы, т.е. $r < m$, то по теореме о ранге на графике отображения $f(x)$ в некоторой окрестности $V(b)$ точки $b = f(a)$ выполняются уравнения

$$y_s = \psi_s(y_1, \dots, y_r), \quad s = r+1, \dots, m$$

с C^1 функциями $\psi_s(y)$ ($s = r+1, \dots, m$). Для той окрестности $U(a)$, которую отображение $y = f(x)$ переводит в $V(b)$, выполняется равенство (при любом $s = r+1, \dots, m$)

$$F[f_1(x), \dots, f_m(x)] \equiv f_s(x) - \psi_s(f_1(x), \dots, f_r(x)) \equiv 0$$

причем $F[y_1, \dots, y_m] \equiv y_s - \psi_s(y_1, \dots, y_r)$ принадлежит классу C^1 и имеет ненулевой градиент.

Заметим, что равенство (3) в соединении с условием $\text{grad } F(b) \neq 0$ показывает, что функция $y = f(x)$ отображает любую окрестность точки a не на всю окрестность точки

$\theta = f(a)$; заведомо не попадают в образ точки, находящиеся по направлению $\text{grad } F(\theta)$ как угодно близко от θ . А так как при $r=m$ по теореме о ранге для функции $y = f(x)$ образ любой окрестности точки $a \in G$ покрывает некоторую окрестность точки $\theta = f(a)$, то при $r=m$ функции $f_1(x)$, \dots , $f_m(x)$ не могут быть зависимыми. Теорема доказана.

Так, функции $f_1(x)$, \dots , $f_m(x)$, осуществляющие диффеоморфизм области G на $f(G)$, являются независимыми, так как здесь матрица $f'(x)$ не вырождена, $r=m=n$. Обратное верно в несколько ослабленной форме: если $r=m=n$, то функции $f_1(x)$, \dots , $f_n(x)$ осуществляют диффеоморфизм некоторой окрестности $U(a)$ любой точки $a \in G$ на соответствующую окрестность точки $f(a) \in f(G)$. Если при этом отображение $y = f(x)$ взаимно однозначно (с G на $f(G)$) , то функции $f_1(x)$, \dots , $f_n(x)$ осуществляют диффеоморфизм G на $f(G)$.

В. Отметим одно простое, но важное следствие зависимости и независимости функций.

Теорема. Пусть функции $f_i(x)$ ($i=1, \dots, m$) , составляющие отображения $y = f(x): R_n \rightarrow R_m$ функционально зависимы (независимы) в области $G \subset R_n$. Пусть $x = \pi(\xi)$ любой диффеоморфизм области G , и $y = w(y)$ любой диффеоморфизм области $f(G)$. Тогда функции $g_i(\xi)$, составляющие отображения

$$g(\xi) = w \{ f [\pi(\xi)] \}$$

также функционально зависимы (независимы) в области $\pi^{-1}(G)$.

Доказательство вытекает из того, что ранг матрицы не меняется при ее умножении на невырожденную матрицу; в частности

$$\text{rang } \|g'(\xi)\| = \text{rang } \|w'(y) f'(x) \pi'(\xi)\| = \text{rang } \|f'(x)\| .$$

2.24. Мы рассмотрим сейчас некоторые частные случаи теоремы о ранге 2.22, получающиеся при вырождении разложений $X = X_1 + X_2$ или $Y = Y_1 + Y_2$.

а. Допустим, что условия теоремы 2.22 выполняются при $X_1 = X$, $X_2 = 0$. В этом случае матрица оператора становится одностолбцовой:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ f'_2(x) \end{pmatrix}$$

Здесь оператор $f'_1(a)$ обратим, поэтому из $f'_1(x)h = 0$ ($x \in U(a)$, $h \in X$) следует, что $h = 0$ и, следовательно, также $f'_2(x)h = 0$. Таким образом, условие (2) в 2.22 следует из (1). Теорема 2.22 утверждает здесь, что граф функции $y = f(x)$ может быть записан (в окрестности точки $\beta = f(a)$) в виде уравнения $y_2 = \psi(y_1)$; поверхность уровня функции $f(x)$ в окрестности точки α оказывается состоящей из точек, поскольку по данному $y = y_1 + y_2$ и даже только по y_1 однозначно определяется соответствующая точка x , в результате применения функции, обратной к $f_1(x)$.

б. Допустим, что условия теоремы 2.22 выполняются при $U_1 = U$, $U_2 = 0$. В этом случае матрица оператора $f'(x)$ становится однострочной:

$$f'(x) = \left\| \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right\|$$

Здесь оператор $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ обратим. Второе условие в 2.22 становится излишним. Теорема 2.22 утверждает здесь, что каждая поверхность уровня функции $f(x)$ может быть записана (в окрестности точки α) в виде $x_1 = \psi(x_2)$ с C^1 функцией $\psi(x_2)$. Значения функции $f(x)$, принимаемые ею в любой окрестности точки α , покрывают целую окрестность точки $\beta = f(a)$ ввиду обратимости функции $f(x)$ на пересечении $U(a)$ с X . В случае б. можно не требовать наличия разложения

$$X = X_1 + X_2$$

со свойствами, указанными в условии теоремы 2.22. Достаточно, чтобы существовало подпространство $X_1 \subset X$ на котором оператор $\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}$ был бы обратим; тогда можно доказать, что существует подпространство $X_2 \subset X$ такое, что X есть (нормированная) прямая сумма X_1 и X_2 , а подпространство X_2 можно даже выбрать так, что оператор

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}$$

будет нулевым оператором. Все это вытекает из следующей леммы:

Л е м м а. Допустим, что сужение линейного непрерывного оператора $A: X \rightarrow Y$ на некотором подпространстве $X_1 \subset X$ представляет собой обратимое отображение A_1 подпространства X_1 на все пространство Y . Тогда существует подпространство $X_2 \subset X$ такое, в нормированной прямой сумме с X_1 все X и такое, что на X_2 оператор A действует как нулевой оператор.

Доказательство. Обозначим обратный оператор к оператору A_1 через A_1^{-1} ; A_1^{-1} действует из Y в X_1 и при этом для любого $x_1 \in X_1$ имеем $A_1^{-1}A_1x_1 = A_1^{-1}Ax_1 = x_1$, и для любого $y \in Y$, $A_1A_1^{-1}y = AA_1^{-1}y = y$. Теперь положим

$$X_2 = \{x \in X; Ax = 0\}.$$

Очевидно, X_2 есть подпространство в X . Покажем, что оно не имеет с X_1 общих элементов, кроме 0 . Пусть $x_0 \in X_1 \cap X_2$, тогда из $x_0 \in X_1$ следует, что $x_0 = A_1^{-1}A_1x_0 = A_1^{-1}Ax_0$, но из $x_0 \in X_2$ следует, что $Ax_0 = 0$, так что и $x_0 = 0$. Далее, для любого $x \in X$ имеем $Ax = y \in Y$ положим

$x_1 = A_1^{-1}y \in X_1$, так что $y = A_1x_1 = Ax_1$; мы получим, что $Ax = Ax_1$, откуда для $x_2 = x - x_1$ выполняется равенство $Ax_2 = Ax - Ax_1 = 0$, так что $x_2 \in X_2$. Мы видим, что для каждого $x \in X$ существует разложение $x = x_1 + x_2$

$x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Покажем, что составляющие x_1 и x_2 непрерывно зависят от x . Действительно, по построению $x_1 = A_1^{-1}Ax$ есть непрерывная функция от x ввиду непрерывности операторов A и A_1^{-1} ; но тогда и $x_2 = x - x_1$ есть также непрерывная функция от x , что и завершает доказательство.

Возвращаясь к функции $f(x)$, мы получаем доказательство сформулированного выше результата о существовании подпространства X_2 , данного в прямой сумме с X_1 все X , и такого, что на X_2 оператор $\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}$ является нулевым. Это последнее

означает, что для функции $x_1 = \varphi(x_2)$, представляющей поверхность уровня функции $f(x)$, и проходящей через точку

$a = (a_1, a_2)$, ($a_1 \in X_1$, $a_2 \in X_2$) при таком выборе подпространства X_2 имеем

$$\psi'(a_2) = - \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_2} \right] = 0 \quad (1)$$

2.25. Проблема эквивалентности.

а. Вопрос о локальной структуре дифференцируемой функции имеет еще один важный аспект; как и в 2.21а, мы рассмотрим вначале случай линейной функции $y = f(x) : X \rightarrow R_n \rightarrow Y = R_m$, записываемой уравнениями

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

Пусть в пространствах X и Y разрешено перейти к новым координатам с помощью невырожденных линейных преобразований; спрашивается, к какому простейшему виду можно будет тогда привести уравнения (1)?

Для ответа мы вновь предположим, что ранг системы (1) равен r и базисный минор матрицы $A = \|a_{ij}\|$ лежит в ее верхнем левом углу. Тогда, как мы видели, между величинами y_1, \dots, y_m имеются связи, описываемые уравнениями 2.21 (4);

$$y_s = c_{s1} y_1 + \dots + c_{sr} y_r \quad (s = r+1, \dots, m) \quad (2)$$

В пространстве X введем новые координаты ξ_1, \dots, ξ_n по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a_{11} x_1 + \dots + a_{1r} x_r + \dots + a_{1n} x_n \\ \xi_2 &= a_{21} x_1 + \dots + a_{2r} x_r + \dots + a_{2n} x_n \\ \xi_{r+1} &= x_{r+1} \\ &\vdots \\ \xi_n &= x_n \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Величины ξ_1, \dots, ξ_n действительно могут служить новыми координатами, так как детерминант системы (3), очевидно, равен базисному минору матрицы A и тем самым отличен от нуля. В пространстве Y введем новые координаты η_1, \dots, η_m по формулам

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= \\ z_{x+1} &= -C_{x+1,1} y_1 - C_{x+1,2} y_2 + y_{x+1} \\ &\vdots \\ z_m &= -C_{m,1} y_1 - C_{m,2} y_2 + \dots + y_m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Детерминант этой системы равен 1, и величины z_1, \dots, z_m действительно могут служить новыми координатами в пространстве Y . Равенства (1) с учетом (2) приводятся теперь к виду

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \xi_1 \\ z_2 &= \xi_2 \\ z_{x+1} &= 0 \\ &\vdots \\ z_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Очевидно, это и есть наиболее простой вид, в котором можно записать линейное преобразование (1) переходом к новым координатам в пространствах X и Y .

б. Рассмотрим аналогичный вопрос для дифференцируемой функции $y = f(x)$, действующей из $G \subset X = R_n$ в $Y = R_m$. В координатной форме функция $f(x)$ записывается системой уравнений

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, m) \quad (6)$$

Спрашивается, к какому простейшему виду можно привести функцию $y = f(x)$, если в окрестности данной точки $a \in G$ и в окрестности точки $b = f(a)$ разрешено переходить к новым координатам с помощью подходящих диффеоморфизмов.

Для ответа будем предполагать выполненными условия теоремы о ранге 2.21б. В пространстве X введем новые координаты по формулам

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \xi_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \xi_{r+1} &= \dots x_{r+1} \\ \xi_n &= \dots x_n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Величины ξ_1, \dots, ξ_n действительно могут служить новыми координатами в некоторой окрестности точки α , так как якобиан

$\frac{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ равный базисному минору матрицы A , в точке α по условию отличен от нуля. В силу теоремы о ранге 2.216 между величинами y_1, \dots, y_m в некоторой окрестности $V_0(b)$ точки $b = f(a)$ имеются соотношения

$$y_s = \varphi_s(y_1, \dots, y_r), \quad s = r+1, \dots, m \quad (8)$$

Введем величины

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= y_1 \\ \eta_2 &= y_2 \\ \eta_{r+1} &= -\varphi_{r+1}(y_1, \dots, y_r) + y_{r+1} \\ \eta_m &= -\varphi_m(y_1, \dots, y_r) + y_m \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь $\frac{\partial(\eta_1, \dots, \eta_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = 1$ и поэтому величины η_1, \dots, η_m

можно принять за новые координаты в некоторой окрестности $V_1(b)$

. Теперь равенства (6) могут быть переписаны, с учетом (7), в виде

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \xi_1 \\ \eta_2 &= \xi_2 \\ \eta_{r+1} &= 0 \\ \eta_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Очевидно, это и есть наиболее простой вид, в котором может быть записана функция $y = f(x)$ с помощью обратимых дифференцируемых преобразований в окрестностях точек α и b .

в. Далее мы приведем теорему, обобщающую построения 2 и

ξ на области в банаховом пространстве. В этой общей теореме нам, разумеется, придется отказаться от использования координат; обобщение будет основано на понятии эквивалентности двух отображений.

Пусть имеются банаховы пространства X, Y, Ξ, H и две дифференцируемые функции $y = \varphi(x): U \subset X \rightarrow V \subset Y$ и $\xi = \psi(\eta): M \subset \Xi \rightarrow N \subset H$. Пусть далее имеются диффеоморфизмы $\omega: U_0 \subset U \rightarrow M_0 \subset M$, $\omega(\alpha) = \alpha$ и $\pi: V_0 \subset V \rightarrow N_0 \subset N$, $\pi(\beta) = \beta$. Отображения φ и ψ называются эквивалентными, если для каждого $x \in U_0$ имеем

$$\pi \varphi(x) = \psi(\omega x) \quad (II)$$

Иногда рисуют "диаграмму отображений"

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\varphi} & V_0 \\ \omega \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_0 & \xrightarrow{\psi} & N_0 \end{array}$$

Соотношение (II) можно трактовать, как своеобразную "коммутативность" этой диаграммы: из любой точки $x \in U_0$ путь по стрелкам φ и π приводит к тому же результату в области

N_0 , что и путь по стрелкам ω и ψ . В конечномерном случае эквивалентность отображений φ и ψ равносильна возможности перехода от φ к ψ с помощью дифференцируемого обратимого преобразования координат в некоторой окрестности $U_0 \subset U$ и в некоторой окрестности $V_0 \subset V$.

г. Установим следующую теорему эквивалентности:

Теорема. В условиях теоремы 2.22 существуют такие окрестности $U_0 \subset U(\alpha)$ и $V_0 \subset V(\beta)$, что (в этих окрестностях) отображение

$y = f(x)$ эквивалентно отображению $\psi: M_0 \subset \Xi = Y_1 + X_2 \rightarrow N_0 \subset H = Y_1 + Y_2$, действующему по формуле $\psi(y_1, x_2) = (y_1, 0)$

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$\omega(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), x_2): U \subset X \rightarrow \Xi$$

$$\pi(y_1, y_2) = (y_1, -\varphi(y_1) + y_2): V \subset Y \rightarrow H$$

Операторная матрица отображения $\frac{d\omega}{dx}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ 0 & E_2 \end{vmatrix}$$

и так как $\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}$ по условию обратимо, то $\frac{d\omega(a)}{dx}$ также обратимо (I.14к). Поэтому, согласно теореме об обратной функции 2.17, отображение ω есть диффеоморфизм некоторой окрестности $U_0(a) \subset U$ на некоторую окрестность $M_0 \subset \Xi$.

Аналогично, операторная матрица отображения $\frac{d\pi}{dy}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ -\varphi'(y_1) & E_2 \end{vmatrix}$$

откуда, по I.14к, оператор $\frac{d\pi}{dy}$ оказывается также обратимым. Значит, и отображение π является диффеоморфизмом некоторой окрестности $V_0(b) \subset V$ на некоторую окрестность $N_0 \subset H$.

Положим $\psi(y_1, x_2) = (y_1, 0)$. Покажем, что для любого $x \in U_0(a)$ выполняется соотношение $\pi f(x) = \psi(\omega(x))$.

Действительно, из $\omega(x) = (F_1(x_1, x_2), x_2)$ следует, что

$$\psi(\omega(x)) = (F_1(x_1, x_2), 0);$$

с другой стороны, из $f(x) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ следует, что $y_2 = y(y_1)$; поэтому

$$\pi f(x) = (F_1(x_1, x_2), 0) = \psi(\omega(x)).$$

Тем самым, отображения f и ψ оказываются эквивалентными, и теорема доказана.

2.26. Особые точки. Мы рассмотрим в этом пункте поведение функции $y = f(x)$ в окрестности ее особой точки в нескольких простейших случаях.

а. Пусть функция $y = f(x)$ есть вещественная функция вещественного переменного x , $\alpha \leq x \leq \beta$. В обыкновенной точке (a, b) согласно общему определению 2.22, имеем $f'(a) \neq 0$, и функция $f(x)$ отображает окрестность точки a

на окрестности точки b . (рис. I.6-1).

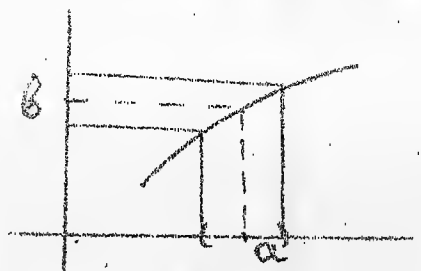


Рис. I.6-1

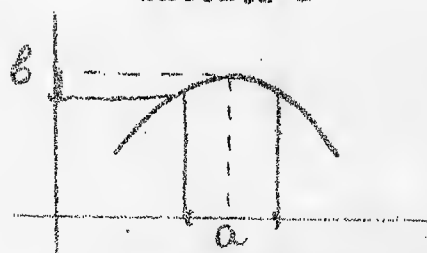


Рис. I.6-2



Рис. I.6-3

Из формулы Тейлора для $\Delta f(x)$

$$\Delta f = f'(a) \Delta x + f''(a) \frac{(\Delta x)^2}{2} + o(x^2)$$

видно, что кривая Γ с точностью до малых 2-го порядка лежит в плоскости, натянутой на векторы $f'(a)$ и $f''(a)$. Если ξ, η — координаты в этой плоскости относительно базиса $f'(a), f''(a)/2$, то параметрическое представление кривой с точностью до малых 2-го порядка имеет вид

$$\xi = \Delta x, \quad \eta = (\Delta x)^2$$

Мы получаем параболу, изображенную на рис. I.6-4.

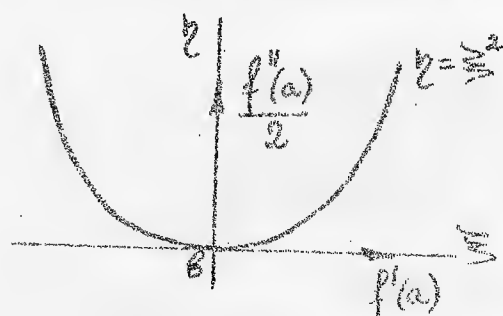


Рис. I.6-4

В особой точке $f'(a) = 0$ и отображения окрестности точки a на окрестность точки b в общем случае уже нет, как видно из рис. I.6-2.

б. Пусть теперь $y = f(x)$, попрежнему функция вещественного $x \in [\alpha, \beta]$, принимает значения в пространстве R_n . В обыкновенной точке (a, b) имеем $f'(a) \neq 0$, так что у кривой Γ , голографа функции $f(x)$ имеется в точке b определенная касательная (рис. I.6-3). В особой точке $f'(a) = 0$ о касательной сказать ничего нельзя.

Здесь может помочь привлечение высших производных функции $f(x)$, существование которых мы сейчас предположим. В общем случае векторы $f'(a)$ и $f''(a)$ линейно независимы

Более точное представление о ходе кривой мы получим, привлекая и третьи производные. Здесь мы получаем

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + \frac{1}{2}f''(a)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(\Delta x)^3 + o((\Delta x)^3)$$

Считая $\frac{1}{6}f'''(a)$ линейно независимым от $f'(a)$ и $f''(a)$ и обозначая соответствующую координату в трехмерном пространстве с базисом $f'(a), \frac{1}{2}f''(a), \frac{1}{6}f'''(a)$ через ξ , получаем параметрическое представление кривой Γ с точностью до малых третьего порядка

$$\xi = \Delta x, \quad \eta = (\Delta x)^2, \quad \zeta = (\Delta x)^3$$

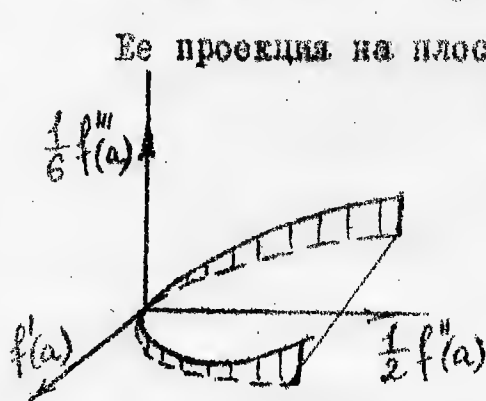


Рис. 1.6-5

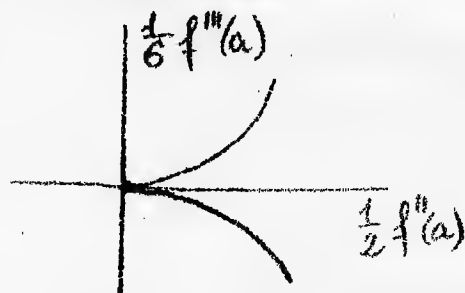


Рис. 1.6-6

Формула Тейлора дает нам

$$\Delta f = f''(a) \frac{(\Delta x)^2}{2} + f'''(a) \frac{(\Delta x)^3}{6} + o(\Delta x^3)$$

так что кривая Γ с точностью до малых третьего порядка лежит в плоскости, натянутой на векторы $f''(a)/2$ и $f'''(a)/6$ и имеет там вид, изображенный на рис. 1.6-6. Но в то время, как в обыкновенной точке у кривой Γ рис. 1.6-5 изображает только проекцию кривой и на самом деле у нее заострения нет, в особой точке у кривой Γ - в общем случае - фактически имеется заострение. Привлечение следующей производной и связанных с ней

Ее проекция на плоскость $f'(a), \frac{1}{2}f''(a)$ (вид с вершины вектора $\frac{1}{6}f'''(a)$) есть указанная выше парабола (рис. 1.6-5).

Ее проекция на плоскость $\frac{1}{2}f''(a), \frac{1}{6}f'''(a)$ есть кривая с параметрическим уравнением

$$\eta = (\Delta x)^2, \quad \zeta = (\Delta x)^3, \text{ или } \zeta = \eta^{3/2}$$

(полукубическая парабола).

Все это относилось к обыкновенной точке кривой Γ .

Рассмотрим теперь расположение кривой Γ в окрестности ее особой точки. В особой точке мы имеем

$f'(a) = 0$. Предположим, что векторы $f''(a)$ и $f'''(a)$ линейно независимы.

малых четвертого порядка не спасает положения; малые четверто-

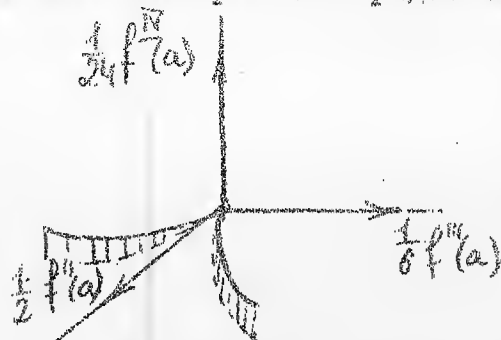


Рис. I.6-7

го порядка показывают отклонение кривой от плоскости $\frac{1}{2} f''(a)$, $\frac{1}{6} f'''(a)$, но заострение сохраняют (рис. I.6-7).

б. Пусть функция $y = f(x) : G \subset X \rightarrow R_1$ имеет числовые значения. Если $(a, f(a))$ есть обыкновенная точка, то как мы видели, $\text{grad } f(a) \neq 0$, следовательно, есть в пространстве X направления, по которым $f(x)$ в окрестности точки a меняется монотонно, так что область значений функции на оси R_1 заполняет целую окрестность точки $b = f(a)$. Если же $(a, f(a))$ есть особая точка, то $\text{grad } f(a) = 0$, так что приращение функции $f(x)$ при выходе из точки $x = a$ есть малая высшего порядка по сравнению с $|x - a|$.

Такая точка a называется стационарной точкой; мы встретим такие точки в теории экстремумов (§ 2.3).

В окрестности такой точки образ функции может не покрывать целую окрестность точки b , а, например, только лишь ее половину (рис. I.6-8).

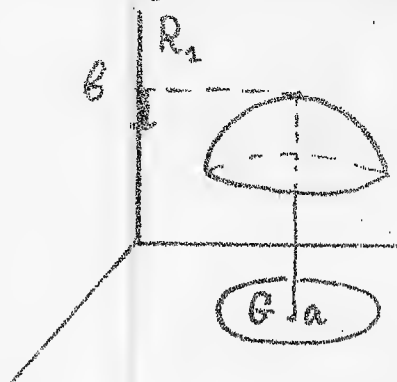


Рис. I.6-8

Теперь рассмотрим особую точку для отображения $y = f(x) : R_n \rightarrow R_n$. Основным типом такой особой точки является Складка.

Для начала рассмотрим конкретное отображение $y = f(x) : R_2 \rightarrow R_2$ задаваемое формулами

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2^2 \quad (1)$$

и имеющее производную

$$f'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{vmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен 2 при $x_2 \neq 0$ и равен 1 при $x_2 = 0$ (т.е. на оси x_1). Отображение (I) всю плоскость $x = \{x_1, x_2\}$ переводит в верхнюю полуплоскость $y_2 \geq 0$, причем каждая точка $y = \{y_1, y_2\}$ этой полуплоскости с $y_2 > 0$ имеет ровно два прообраза $x_1 = y_1$, $x_2 = \pm \sqrt{y_2}$ находящихся соответственно в верхней и нижней полуплоскостях плоскости x . Более подробно рассмотрим вертикальную прямую $x_1 = \text{const}$, $-\infty < x_2 < +\infty$; когда точка $\{x_1, x_2\}$ спускается по этой прямой от $+\infty$ к $-\infty$, ее образ сначала спускается по вертикали $y = x_1$ от $y_2 = +\infty$ до точки $y_2 = 0$ и затем поднимается по той же прямой к $y_2 = +\infty$. Такое отображение, естественно, называется складкой.

Рассмотрим теперь общий случай отображения $y = f(x)$, $G \subset R_n \rightarrow R_n$. Пусть якобиан $J(x)$ отображения $f(x)$ в некоторой точке $a \in G$ равен нулю. Вообще говоря, характер отображения $f(x)$ в окрестности такой точки может быть весьма сложен; мы покажем сейчас, что при некоторых дополнительных предположениях отображение $f(x)$ имеет тип складки. Более точно, мы покажем, что если не только сами функции $f_i(x)$ имеют класс C^1 , но и все их производные $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$. Также принадлежат к этому классу, так что, в частности, $J(x)$ есть также C^1 -функция, и если также $\text{grad } J(a) \neq 0$, и, более того, $\text{grad } J(a)$ не лежит в "градиентном подпространстве" пространства $X = R_n$ (определение будет сейчас дано), то при движении точки $x \in X$ по кривой, протыкающей поверхность

$S = \{x \in X : J(x) = 0\}$ в пределах некоторой окрестности точки a , соответствующая точка $y = f(x)$ по некоторой линии доходит до поверхности $f(S) \subset Y = R_n$, а затем по этой линии возвращается в обратную сторону.

Пусть отображение $y = f(x) : X = R_n \rightarrow Y = R_n$ имеет в базисе e_1, \dots, e_n (так что $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$) аналитич-

ское представление

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$y_n = f_n(x_1, \dots, x_n),$$

и пусть $J(a) = 0$. Отсюда следует, что векторы

$$\text{grad } f_1(a) = \left\{ \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \right\}$$

$$\text{grad } f_n(a) = \left\{ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \right\}$$

линейно зависимы и тем самым порождают некоторое истинное подпространство Z в пространстве X . Это подпространство мы и будем называть градиентным. Пусть далее $\text{grad } J(a) \neq 0$. Как известно (07.14) производная от определителя n -го порядка равна сумме n определителей, отличающихся от данного тем, что в i -ом слагаемом i -ый столбец состоит из производных i -го столбца данного определителя; поэтому, если все миноры $(n-1)$ -го порядка матрицы $\|f'(a)\|$ равны 0, то для любого направления e и $\frac{\partial J(a)}{\partial e} = 0$, поскольку каждый из определителей указанной суммы можно разложить по столбцу, где стоят производные, с коэффициентами, равными некоторым минорам исходного определителя. Но в нашем случае по условию $\text{grad } J(a) \neq 0$, и, значит, существует направление e , в котором $\frac{\partial J(a)}{\partial e} \neq 0$; следовательно, у матрицы $\|f'(x)\|$ существует минор $(n-1)$ -го порядка $B(x)$, равный при $x=a$ некоторому числу $B \neq 0$. Пусть этот минор, для определенности, располагается в первых $(n-1)$ строках и первых $(n-1)$ столбцах матрицы $f'(a)$.

Рассмотрим в окрестности точки $a = (a_1, \dots, a_n)$ функции

$$\xi_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\xi_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\xi_n = x_n.$$

Очевидно, имеет место равенство $\frac{\partial \xi_1, \dots, \xi_n}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = B(x) \neq 0$.

Поэтому величины ξ_1, \dots, ξ_n в некоторой окрестности точки α могут служить новыми координатами (2.17в). В этих координатах отображение f записывается формулами

$$y_1 = \xi_1$$

$$y_{n-1} = \xi_{n-1}$$

$$y_n = \psi(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

где $\psi(\xi_1, \dots, \xi_n) = f_n(x_1(\xi), \dots, x_{n-1}(\xi), \xi_n)$. При этом согласно I.33, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}$ и

$$J(x) = \det \left\| \frac{dy}{dx} \right\| = \det \left\| \frac{dy}{d\xi} \right\| \cdot \det \left\| \frac{d\xi}{dx} \right\| = B(x) \cdot \frac{\partial \psi(x)}{\partial \xi_n},$$

$$\frac{\partial \psi(a)}{\partial \xi_n} = 0.$$

Далее, обозначая $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n}$ и используя также I.34г, находим

$$\begin{aligned} \text{grad } J(a) &= \text{grad } B(a) \cdot \psi(a) + B(a) \cdot \text{grad } \psi(a) = B(a) \text{grad } \psi(a) = \\ &= B(a) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \text{grad } \xi_1(a) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \text{grad } \xi_n(a) \right) = \\ &= B(a) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \text{grad } y_1(a) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_{n-1}} \text{grad } y_{n-1}(a) + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} e_n \right). \end{aligned}$$

Если бы было $\frac{\partial \psi(a)}{\partial \xi_n} = 0$, то $\text{grad } J(a)$ линейно выражался бы через $\text{grad } y_1, \dots, \text{grad } y_{n-1}$, что по условию не имеет места. Поэтому $\frac{\partial \psi(a)}{\partial \xi_n} \neq 0$. Отсюда, по теореме о неявной функции, мы получаем, что уравнение $J(x) = 0$ или, что то же, $\psi(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$, можно разрешить относительно ξ_n , так что в координатах ξ_1, \dots, ξ_n поверхность $S = \{x : J(x) = 0\}$ может быть представлена в форме $\xi_n = \omega(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, где ω — функция с непрерывными производными по своим аргументам в окрестности точки $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Вне поверхности S мы имеем $J(x) \neq 0$; пусть для определенности $J(x) > 0$ "над" поверхностью S , т.е. при

$\xi_n > \omega(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, тогда, поскольку $\text{grad } J(a) \neq 0$, "под" поверхностью S , т.е. при $\xi_n < \omega(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, будет выполняться неравенство $J(x) < 0$.

Пусть $c = (c_1, \dots, c_n)$ точка на поверхности S в пределах указанных выше окрестностей точки a . Отрезок $\ell = \{\xi_1 = c_1, \dots, \xi_{n-1} = c_{n-1}, \xi_n = c_n + t\}$, где $|t| \leq \varepsilon$, протыкает (при $t=0$) поверхность S . В пространстве U образ $f(S)$ поверхности S имеет уравнение

$$y_n = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \omega(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})) = \varphi(y_1, \dots, y_{n-1}, \omega(y_1, \dots, y_{n-1}))$$

также класса C^1 . Далее, образ отрезка ℓ лежит на прямой

$$L = \{y_1 = c_1, \dots, y_{n-1} = c_{n-1}, y_n = \varphi(c_1, \dots, c_{n-1}, c_n + t)\}.$$

При этом $\frac{\partial y_n}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n} = \frac{1}{B} J(x)$, так что $\frac{\partial y_n}{\partial t} > 0$

при $t > 0$ и $\frac{\partial y_n}{\partial t} < 0$ при $t < 0$. Мы видим, что

при t , изменяющемся от ε до $-\varepsilon$, когда точка

$\xi(t) = \{c_1, \dots, c_{n-1}, c_n + t\}$ пробегает отрезок ℓ "сверху вниз", соответствующая точка $f[\xi(t)]$ при $t \rightarrow 0$ опускается по прямой L до поверхности $f(S)$ и при дальнейшем убывании t поднимается по той же прямой L вверх. Это и означает, что отображение $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки a имеет вид складки.

д. Особенность следующего типа, "Сборку" мы покажем на примере отображения $y = f(x): R_2 \rightarrow R_2$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = -x_1 x_2 + x_2^3$$

} (I)

Здесь мы имеем

$$J(x) = \det \|f'(x)\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -x_2 & -x_1 + 3x_2^2 \end{vmatrix} = -x_1 + 3x_2^2$$

так что особые точки располагаются на параболе $\Gamma: \{x_1 = 3x_2^2\}$ (рис. I.6-9). При этом $\text{grad } y_1 = e_1$, $\text{grad } y_2 = -x_2 e_1 + (-x_1 + 3x_2^2) e_2$ и в особых точках градиентное подпространство порождается вектором e_1 . Далее

$$\text{grad } J(x) = -e_1 + 6x_2 e_2$$

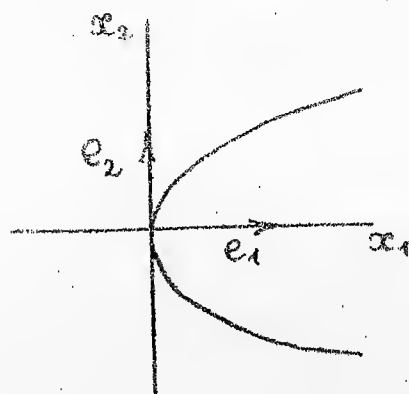


Рис. 1.6-9

вертикальную прямую $y_1 = x_1 = \text{const}$ на плоскости (y_1, y_2) . Но при $x_1 < 0$ и изменении x_2 от $-\infty$ до $+\infty$ величина y_2 меняется монотонно от $-\infty$ до $+\infty$, так что прямая $x_1 = \text{const}$ отображается на прямую $y_1 = \text{const}$.

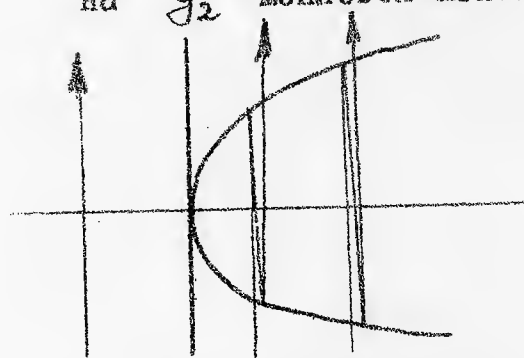


Рис. 1.6-10

и при $x_2 \neq 0$ $\text{grad } J(x)$ не лежит в градиентном пространстве; по предыдущему, особенности при $x_2 \neq 0$, т.е. на параболе Γ вне ее вершины, есть особенности типа складки. В точке $(0, 0)$ $\text{grad } J(x) = e_1$ лежит в градиентном пространстве. Характер отображения здесь легко установить непосредственно из рассмотрения формул (I). Как и в г, каждая вертикальная прямая $x_1 = \text{const}$ на плоскости (x_1, x_2) отображается в (y_1, y_2) на плоскости (y_1, y_2) взаимно однозначно; а при $x_1 > 0$ y_2 как функция от x_2 , сначала возрастает от $-\infty$ до положительного значения $\sqrt{\frac{x_1}{3}}$, затем убывает до $-\sqrt{\frac{x_1}{3}}$ и, наконец, возрастает до $+\infty$. Таким образом получается отображение с трижды проходимым отрезком (рис. 1.6-10).

Та особенность, которая при этом образуется в $(0, 0)$ и называется "Сборкой".

е. Обобщением складки и сборки является "особенность Уитни", задаваемая уравнениями в пространстве R_k

$$y_1 = x_1$$

$$y_{k-1} = x_{k-1}$$

$$y_k = -x_1 x_2 - x_1 x_3^2 - \dots - x_1 x_k^{k-1} + x_{k+1}$$

ж. Существуют и более сложные особенности отображений. Для распознавания особенностей Уитни имеются общие теоремы, аналогичные теореме из в. Вообще в настоящее время особенности дифференцируемых отображений привлекают большой интерес. См., например,

статью В.И. Арнольда "Особенности гладких отображений" в УМН, т. XXIII, вып. I (139), а также сборник переводов "Особенности дифференцируемых отображений", издательство "Мир", Москва 1968.

§ 2.3. Стационарные значения числовых функций.

2.3I. Экстремумы.

а. Пусть числовая функция $y = f(x)$ определена в области G нормированного пространства X . Внутренняя точка $a \in G$ называется точкой локального минимума функции $f(x)$, если всюду в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \geq f(a)$. Аналогично, внутренняя точка $b \in G$ называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если всюду в некоторой окрестности точки b выполняется неравенство $f(x) \leq f(b)$. Точки локального максимума и точки локального минимума называются точками локального экстремума.

В точке локального экстремума одновременно реализуется и локальный экстремум вдоль каждой прямой, проходящей через эту точку. Поэтому, если функция $f(x)$ дифференцируема, то в точке локального экстремума обращается в нуль производная функции $f(x)$ по любому одномерному подпространству (1.46г). Вспоминая выражение производной по одномерному подпространству, мы заключаем, что в точке a локального экстремума функции $f(x)$ для любого вектора $h \in X$ имеет место равенство $f'(a)h = 0$; другими словами, в точке локального экстремума оператор $f'(a)$ становится нулевым оператором:

$$f'(a) = 0 \quad (1)$$

Точки a , в которых выполняется равенство (1), называются стационарными точками функции $f(x)$. В каждой из них главная линейная часть приращения функции обращается в нуль. (И следовательно, приращение функции имеет высший порядок малости по сравнению с h).

Вообще говоря, это еще не означает, что в точке a обязательно реализуется локальный экстремум функции $f(x)$, но, во всяком случае, искомые экстремальные точки содержатся в числе стационарных. Найдя стационарные точки, следует каждую из них дополнительно проанализировать на "характер стационарности".

б. Рассмотрим случай $X = R_n$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.
Тогда уравнение (I) равносильно системе n уравнений с неизвестными a_1, \dots, a_n

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и разыскание стационарных точек приводится к разысканию решений этой системы.

Это — известный результат классического анализа.

в. Пусть M есть отрезок $a \leq x \leq b$ вещественной оси и $V = V(c, r)$ шар в нормированном пространстве Y с центром в точке c и радиуса r . Пусть $F(x, y)$ вещественная функция, определенная и равномерно непрерывная на $M \times V$ и обладающая равномерно непрерывной производной $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$.

Пусть далее $Y(M)$ нормированное пространство всех непрерывных функций $y(x): M \rightarrow Y$ с нормой $\|y\| = \sup_{a \leq x \leq b} |y(x)|$ и $V(M) \subset Y(M)$ совокупность тех функций $y(x) \in Y(M)$, значения которых лежат в шаре V . Как мы знаем из I.16д и I.48 в этом случае определен оператор $\Phi[y]: V(M) \rightarrow R(M)$ действующий по формуле

$$\Phi[y](x) = F(x, y(x))$$

представляющий собой непрерывное и дифференцируемое отображение из $V(M)$ в $R(M)$ с производной

$$\Phi'(y) = \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y};$$

этот линейный оператор действует на элемент $h \in Y(M)$ по правилу

$$\Phi'(y)h = \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y} h(x)$$

Рассмотрим числовую функцию на $V(M)$

$$J[y] = \int_a^b \Phi[y](x) dx = \int_a^b F(x, y(x)) dx$$

и найдем ее стационарные точки. Для этого составим ее производную

$$J'[y] = \int_a^b \Phi'[y](x) dx.$$

Это есть оператор, действующий из $Y(M)$ в R_1 по формуле

$$J'[y] \cdot h = \int_a^b \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y} h(x) dx \quad (3)$$

В стационарной точке $y = a \equiv a(x)$ выражение $J'[a]h = 0$ при любом h , иначе говоря, интеграл (3) с $y(x) \equiv a(x)$ обращается в нуль для любой функции $h(x) \in Y(M)$

Мы покажем, что в таком случае и функция $\frac{\partial F(x, a(x))}{\partial y}$ обращается тождественно в нуль. Для этого используем лемму:

Лемма. Пусть при каждом $x \in M = [a, b]$ задан линейный непрерывный функционал $P(x)$ на пространстве Y , непрерывно зависящий от x , и пусть для любой непрерывной функции $h(x) \in Y(M)$ выполняется равенство

$$\int_a^b P(x) h(x) dx = 0 \quad (4)$$

Тогда $P(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть для некоторой точки $c \in [a, b]$ имеем $P(c) \neq 0$; пусть, например, $\|P(c)\| = \mu > 0$. В силу непрерывности $P(x)$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|x - c| \leq \delta$ выполняется неравенство $|P(c) - P(x)| < \frac{\mu}{3}$. Рассмотрим в пространстве Y такой вектор h , $\|h\| = 1$, что $P(c)h > \frac{2\mu}{3}$; тогда для $|x - c| \leq \delta$ будем иметь $P(x)h \geq P(c)h - |[P(x) - P(c)]h| \geq \frac{2\mu}{3} - \frac{\mu}{3} = \frac{\mu}{3}$. Пусть теперь $\tau(x) > 0$ вещественная непрерывная функция, отличная от 0 только при $|x - c| \leq \delta$ и такая, что

$$\int_a^b \tau(x) dx = 1$$

Положим $h^a(x) = h \cdot \tau(x)$. Мы имеем

$$\int_a^b P(x)h(x)dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} P(x)h(x)\tau(x)dx \geq \frac{M}{3} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \tau(x)dx = \frac{M}{3}$$

что противоречит условию (4). Лемма доказана.

Используя лемму, мы получаем для искомой функции $a(x)$ уравнение

$$\frac{\partial F(x, a(x))}{\partial y} = 0.$$

Решая его при каждом x и выделяя непрерывные ветви решений — если таковые существуют — получаем множество всех стационарных точек функции $J[y]$. Для выделения из них точек экстремума требуется дальнейшее конкретное исследование каждой стационарной точки.

2.32. Условный экстремум.

а. О п р е д е л е н и я. Для числовых функций от многомерного аргумента $x \in G \subset X$ возникает новый тип экстремальных задач — задачи на условный экстремум. Постановка задачи на условный экстремум такова. Нам задана, как и ранее, числовая дифференцируемая функция $y = f(x)$ ($G \subset X \rightarrow R$). Кроме того, нам задано новое нормированное пространство Z и дифференцируемая векторная функция $\psi(x): G \rightarrow Z$; из принимаемых ее значений в области G мы фиксируем некоторое значение $C \in Z$.
Условие

$$\psi(x) = C \quad (I)$$

выделяет в области G поверхность уровня функции $\psi(x)$. Точка $a \in G$ называется точкой условного локального минимума функции $f(x)$ при условии (I), если $\psi(a) = C$ и для всех точек x из некоторой окрестности a , удовлетворяющих условию (I), справедливо неравенство $f(x) \geq f(a)$. Иными словами, точка a , лежащая на поверхности уровня (I), есть точка условного минимума функции $f(x)$, если для всех точек этой поверхности уровня, достаточно близких к точке a , выполняется неравенство $f(x) \geq f(a)$. При этом вовсе не требуется, чтобы неравенство $f(x) \geq f(a)$ выполнялось для точек x , хотя и близких к a , но не лежащих на поверхности уровня (I).

Аналогично с заменой знака \geq на \leq , определяется

точка условного максимума.

Точки условного максимума и условного минимума вместе называются точками условного экстремума.

Ниже будет найдено необходимое условие, которому удовлетворяют точки условного экстремума. Предположим, что рассматриваемая точка α является обыкновенной точкой поверхности $\varphi(x) = C$ (2.22), т.е. существует такое подпространство $X_1 \subset X$, что оператор $\frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial x_1} (X_1 \rightarrow Z)$ обратим. Тогда, как мы знаем (2.24в), на некотором подпространстве $X_2 \subset X$, составляющем в прямой сумме с X_1 все пространство X , оператор $\frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial x_2}$ совпадает с нулевым оператором.

б. Лемма. В обыкновенной точке α условного экстремума функции $f(x)$ для всякого $h_2 \in X$ имеем $f'(\alpha)h_2 = 0$.

Доказательство. Пусть для некоторого $h_2 \in X_2$ это не выполняется, т.е. $f'(\alpha)h_2 \neq 0$. Мы утверждаем, что для любого достаточно малого $\alpha \in R_1$ можно так выбрать $h_1 \in X_1$, что точка $\alpha + \alpha h_2 + h_1$ по-прежнему будет лежать на "поверхности" (I), т.е.

$$\varphi(\alpha + \alpha h_2 + h_1) = C \quad (2)$$

при этом h_1 есть бесконечно малая величина по сравнению с α . Рассмотрим функцию от α и h_1 :

$$\Phi(\alpha, h_1) \equiv \varphi(\alpha + \alpha h_2 + h_1) - C \quad (R_1 \times X_1 \rightarrow Z)$$

При $\alpha = 0$, $h_1 = 0$ она обращается в нуль. Далее,

$$\frac{\partial \Phi(0,0)}{\partial h_1} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial x}{\partial h_1} \Big|_{x=\alpha} = \frac{\partial \varphi(\alpha)}{\partial x_1}$$

по условию есть обратимый оператор. Применяя теорему о неявной функции 2.12 мы получаем возможность выразить h_1 из уравнения (2); пусть, например, это решение дается функцией

$$h_1 = \psi(\alpha) \quad (R_1 \rightarrow X_1)$$

Функция $\psi(\alpha)$ дифференцируема (2.14) и

$$\begin{aligned}\psi'(0) &= - \left[\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(0,0)}{\partial \alpha} = \\ &= - \left[\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1} \right]^{-1} \varphi'(a); h_2 = 0\end{aligned}$$

поскольку $h_2 \in X_2$ и $\varphi'(a)h_2 = 0$. Поэтому $h_1 = \psi(\alpha)$ — бесконечно малое по сравнению с α .

Рассмотрим теперь $f(a + \alpha h_2 + \psi(\alpha))$, где h_1 есть уже найденная величина $\psi(\alpha)$. Мы имеем

$$\begin{aligned}f(a + \alpha h_2 + h_1) - f(a) &= f'(a)(\alpha h_2 + h_1) + o(\alpha h_2 + h_1) = \\ &= \alpha f'(a)h_2 + f'(a)h_1 + o(\alpha h_2 + h_1).\end{aligned}$$

Справа первое слагаемое есть числовая линейная функция от α с угловым коэффициентом $f'(a)h_2 \neq 0$. Второе и третье слагаемые бесконечно малы по сравнению с α вместе с h_1 . Но в таком случае при $\alpha = 0$, $h_1 = h_1(\alpha) = 0$ функция $f(x)$ не имеет условного экстремума: точка $x = a + \alpha h_2 + h_1$ лежит по доказанному на "поверхности" (I) как угодно близко к точке a , а разность $f(x) - f(a)$ при разных знаках α имеет разные знаки.

Таким образом, из $h_2 \in X_2$ следует $f'(a)h_2 = 0$, и лемма доказана.

Вообще будем называть обыкновенную точку a на поверхности (I) условно стационарной точкой функции $f(x)$ при условии $\varphi(x) = C$, если $f'(a)h_2 = 0$ для всякого $h_2 \in X_2$, где X_2 нулевое подпространство оператора $\varphi'(a)$. Всякая условно экстремальная точка дифференцируемой функции $f(x)$ является условно стационарной; но условно стационарная точка может не быть условно экстремальной (как и в теории абсолютного экстремума).

в. Теперь мы можем сформулировать необходимое условие для условно стационарной точки (следовательно, и для точки локального условного экстремума):

Т е о р е м а. Если точка a есть условно стационарная

точка функции $f(x): G \subset X \rightarrow \mathbb{R}_1$ при условии (I), то существует такой линейный непрерывный функционал $\lambda(z)$ на пространстве Z , что для любого $h \in X$

$$f'(a)h = \lambda[\psi'(a)h]. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функционал $\lambda(z)$, используя формулу (3) и обратимость оператора $\frac{\partial \psi(a)}{\partial x_1}$:

$$\lambda(z) = f'(a) \left[\frac{\partial \psi(a)}{\partial x_1} \right]^{-1} z \quad (4)$$

Непрерывность функционала $\lambda(z)$ следует из непрерывности оператора $\left[\frac{\partial \psi(a)}{\partial x_1} \right]^{-1}$ и непрерывности оператора $f'(a)$. Поскольку $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in X_1$, $h_2 \in X_2$, и по определению в условно стационарной точке имеем $\psi'(a)h_2 = 0$, $f'(a)h_2 = 0$, равенство (3) достаточно установить для векторов $h_1 \in X_1$; а для $h = h_1$ оно очевидно следует из (4).

г. Из теоремы 6 следует и способ разыскания условно стационарных точек. Именно, мы рассмотрим пока неопределенный линейный функционал $\lambda(x) (Z \rightarrow \mathbb{R}_1)$ и составим функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda[\psi(x)].$$

В искомой условно стационарной точке a функции удовлетворяется уравнение (3)

$$f'(a) - \lambda[\psi'(a)] = 0$$

что представляет собою выражение того факта, что точка a есть стационарная точка (во всей области G) функционала $F(x)$. Тем самым задача об условно стационарных точках сводится к задаче об отыскании обычных стационарных точек некоторой другой функции с неизвестным функционалом $\lambda(z)$.

Среди условно стационарных точек находятся и все условно экстремальные точки; выделение их из совокупности всех условно стационарных точек требует — как и в случае абсолютного экстремума — индивидуального рассмотрения каждой условно стационарной точки.

2.33. П р и м е р ы.

а. Пусть

$$X = R_n, \quad y = f(x) : G \subset R_n \rightarrow R_1,$$

$$z = \varphi(x) : G \rightarrow R_k.$$

Таким образом, условие $\varphi(x) = C$ можно записать в виде k числовых соотношений

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= C_1 \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) &= C_k \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Линейный функционал $\lambda(z) : R_k \rightarrow R_1$ определяется заданием k чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и действует на вектор $z = \{z_1, \dots, z_k\} \in R_k$ по формуле

$$\lambda(z) = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_k z_k$$

Решение задачи об условном экстремуме теперь сводится к отысканию стационарных точек для функции

$$F(x) \equiv f(x) - \lambda[\varphi(x)] = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

Числа λ_i называются множителями Лагранжа. Для решения этой задачи мы должны решить уравнение

$$F'(x) \equiv f'(x) - \lambda \varphi'(x) = 0,$$

или, в координатной записи, систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таким образом, задача приводится к решению системы $k+n$ уравнений (I) и (2) с неизвестными $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$. Это — известный результат классического анализа.

б. Как и в 2.31в, рассмотрим функцию

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x)) dx : V(M) \rightarrow R_1$$

(при тех же условиях на $F(x, y)$). Будем искать ее условно стационарные точки на поверхности, определяемой другим аналогич-

ным выражением

$$K(y) = \int_a^b G(x, y(x)) dx = C \quad (3)$$

где на $G(x, y)$ наложены такие же условия, как и на $F(x, y)$. Пространство Z в данном случае совпадает с R_1 , и линейный функционал $\lambda(z)$ есть умножение на число λ . В соответствии с общей теорией искомые условно стационарные точки есть обычные стационарные точки для функции

$$Q(y) = J(y) - \lambda K(y) = \int_a^b [F(x, y(x)) - \lambda G(x, y(x))] dx$$

Для их разыскания согласно 2.3Iв, следует рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G(x, y(x))}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

и отобрать из возможных решений те, которые удовлетворяют условию (3).

Пусть, например, $[a, b] = [0, 1]$, $F(x, y) = y^3$, $G(x, y) = y^2$, $C = 1$, таким образом, мы должны найти условно стационарные точки функции

$$F[y] = \int_0^1 y^3(x) dx \quad (5)$$

при условии

$$K[y] = \int_0^1 y^2(x) dx = 1 \quad (6)$$

Уравнение (4) в данном случае принимает вид

$$3y^2(x) - 2\lambda y(x) = 0$$

Его решения: $y_1(x) \equiv 0$ непригодно, так как не удовлетворяет условию (6); $y_2(x) = \frac{2\lambda}{3}$ годится, если

$\frac{2\lambda}{3} = 1$. Итак, имеется единственная условно стационарная точка $y_0(x) = 1$. Является ли эта точка точкой условного экстремума? Положим $y(x) = 1 + \varepsilon(x)$, где $\|\varepsilon(x)\|$ мала тогда мы получим

$$F(y) = \int_0^1 y^3(x) dx = 1 + 3 \int_0^1 \varepsilon(x) dx + 3 \int_0^1 \varepsilon^2(x) dx + \int_0^1 \varepsilon^3(x) dx$$

$$K(y) = \int_0^1 y^2(x) dx = 1 + 2 \int_0^1 \varepsilon(x) dx + \int_0^1 \varepsilon^2(x) dx = 1$$

Отсюда

$$\int_0^1 \varepsilon(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon^2(x) dx$$

и

$$F(y) = 1 + \frac{3}{2} \int_0^1 \varepsilon^2(x) dx + \int_0^1 \varepsilon^3(x) dx$$

Второе слагаемое здесь положительно, третье имеет высший порядок малости. Отсюда следует, что точка $y_0(x) \equiv 1$ является точкой условного минимума для функции (5) при условии (6).

§ 2.4. Дифференциальные уравнения. (локальные теоремы).

2.4I. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f(x, y) \quad (1)$$

Здесь x — вещественный аргумент, меняющийся в промежутке

$M = \{x \in \mathbb{R}_1 : |x-a| \leq h\}$; $y = y(x)$ — искомая функция с значениями в банаховом пространстве Y ; $f(x, y) : M \times V \subset Y \rightarrow Y$ непрерывная ограниченная функция, определенная в произведении интервала M и шара $V = V(b_0, r)$ радиуса r с центром в точке $b_0 \in Y$.

К уравнению (1) присоединяется начальное условие

$$y(a) = b_0 \in Y \quad (2)$$

Искомое решение $y(x)$, если оно существует, удовлетворяет соотношению

$$y(x) = b_0 + \int_a^x f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (3)$$

которое получается при интегрировании обеих частей равенства (1) с учетом (2). Обратно, если $y(x)$ есть решение уравнения (3), то дифференцируя (3), получаем (1), а подставляя в (3) $x = a$, получаем (2).

Таким образом, разыскание решения уравнения (3) равносильно разысканию решения уравнения (1) с условием (2).

Решить уравнение (3) — это значит найти неподвижную точку отображения

$$F[y] = v_0 + \int_a^x f(\xi, y(\xi)) d\xi : V(M) \rightarrow V(M)$$

где через $V(M)$, как и ранее, мы обозначаем полное метрическое пространство всех непрерывных функций $y(x)$, определенных для $x \in M$ и принимающих значения в шаре $V \subset Y$, с расстоянием, порожденным нормой $\|y(x)\| = \sup_{|x-a| \leq h} |y(x)|$.

Наша задача состоит в установлении условий существования и единственности решения уравнения (3) хотя бы в пространстве $V(M_\delta)$, где $M_\delta = \{x \in M : |x-a| \leq \delta\}$.

Вообще говоря, только при условии непрерывности $f(x, y)$ решения не существует ни при каком δ (см. задачу). Поэтому для получения успешного результата мы должны накладывать на $f(x, y)$ дальнейшие условия.

Предположим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет в $M_h \times V$ условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C |y_1 - y_2| \quad (1)$$

с некоторой постоянной C .

Обозначим далее

$$B = \sup_{\substack{x \in M_h \\ y \in V}} |f(t, y)| \quad (2)$$

Теорема. При указанных предположениях для любого $\delta < \min(h, \tau/B, 1/C)$ отображение (3) переводит пространство $V(M_\delta)$ в себя и является сжимающим.

Доказательство. Мы имеем (при неопределенном пока $\delta \leq h$)

$$\begin{aligned} \|F(y_1(x)) - F(y_2(x))\|_{V(M_\delta)} &= \sup_{|x-a| \leq \delta} \left| \int_a^x [f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))] d\xi \right| \leq \\ &\leq \sup_{|x-a| \leq \delta} \int_a^x |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_2(\xi))| d\xi \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{|x-a|} C \int_a^x |y_1(\xi) - y_2(\xi)| d\xi \leq \\
&\leq C \int_a^x \sup_{|\xi-a| \leq \delta} |y_1(\xi) - y_2(\xi)| d\xi \leq \\
&\leq C \cdot \delta \cdot \|y_1 - y_2\|_{Y(M_\delta)}
\end{aligned}$$

так что отображение $F[y]: V(M_\delta) \rightarrow V(M_\delta)$ является сжимающим при любом $\delta < 1/c$. Далее при каждом $x \in M_\delta$

$$|F(y(x)) - v_0|_Y \leq \int_a^x |f(\xi, y(\xi))| d\xi \leq B \cdot \delta$$

где $B = \sup_{\substack{x \in M_\delta \\ y \in V}} |f(x, y)|_Y$; таким образом, если взять

$$\delta \leq \tau/B$$

мы будем иметь

$$\|F(y(x)) - v_0\|_{Y(M_\delta)} \leq \tau$$

так что $F(y(x))$ вместе с $y(x)$ лежит в $V(M_\delta)$. Если же $\delta < \min(\tau/B, 1/c)$, то отображение $F(y(x))$ переводит $V(M_\delta)$ в себя и является сжимающим, что и требовалось.

Отсюда следует существование и единственность неподвижной точки (I.43в), следовательно, существование и единственность в пространстве $V(M_\delta)$ решения уравнения (I) с условием (2).

2.42. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение с параметром λ :

$$y' = f(x, y, \lambda) \quad (I)$$

Здесь попрежнему x — вещественный аргумент, меняющийся в промежутке $M = \{x \in R_1: |x-a| \leq h\}$ и $y = y(x)$ функция с значениями в банаховом пространстве Y ; параметр λ меняется в метрическом пространстве Λ ; функция $f(x, y, \lambda): M \times V \times \Lambda \rightarrow Y$ ограничена, равномерно непрерывна и имеет ограниченную и равномерно непрерывную частную производную по y .

К уравнению (I) присоединяется начальное условие, также содержащее параметр λ :

$$y(a) = b(\lambda) : \Lambda \rightarrow Y, \quad b(\lambda_0) = b_0, \quad (2)$$

причем функция $b(\lambda)$ равномерно непрерывна и ограничена на Λ . Обозначим через Λ_τ шар $\{\lambda \in \Lambda : \rho(\lambda, \lambda_0) \leq \tau\}$. Положим

$$B = \sup_{\substack{t \in M_h \\ y \in V \\ \lambda \in \Lambda}} |f(t, y, \lambda)|, \quad C = \sup_{\substack{t \in M_h \\ y \in V \\ \lambda \in \Lambda}} \left\| \frac{\partial f(t, y, \lambda)}{\partial y} \right\|$$

Теорема. При высказанных условиях существует такое $\tau > 0$, что при любом $\delta < \min(h, \tau/B, 1/c)$ в области $M_\delta \times \Lambda_\tau$ определена непрерывная функция $y(x, \lambda)$, являющаяся решением уравнения (I) и удовлетворяющая условию (2).

Доказательство. Как и в 2.4I, нам нужно решить уравнение типа 2.4I (3), или, с учётом наличия параметра λ ,

$$y(x, \lambda) = b(\lambda) + \int_a^x f(\xi, y(\xi, \lambda), \lambda) d\xi \quad (3)$$

Подойдем к этой задаче, как к задаче на неявную функцию. Рассмотрим отображение

$$F[y(x), \lambda] = y(x) - \left(b(\lambda) + \int_a^x f(\xi, y(\xi), \lambda) d\xi \right) \quad (4)$$

переводящее любой шар $V(M_\delta) \times \Lambda$ в пространство $Y(M_\delta)$. Если $\lambda = \lambda_0$, то $b(\lambda) = b_0$ и для соответствующего решения $y_0(x)$ уравнения (I) с условием (2) — существующего по 2.4I в пространстве $V(M_\delta)$ — с некоторым $\delta \geq 0$ выполняется уравнение

$$F[y_0(x), \lambda_0] = 0 \quad (\text{в } Y(M_\delta)). \quad (5)$$

Если имеется возможность использовать теорему о неявной функции 2.12–2.13, то мы получим существование в некотором шаре $\Lambda_\tau \subset \Lambda$ непрерывной функции $y(x, \lambda)$ с значениями в $V(M_\delta)$, удовлетворяющей условию

$$F[y(x, \lambda), \lambda] = 0 \quad (\text{в } Y(M_\delta)) \quad (6)$$

а это и есть уравнение (3). Нам остается проверить выполнение условий теоремы о неявной функции. Эти условия следующие:

а. Функция $F[y(t, \lambda)] \in V(M_\delta) \times \Lambda$ является ограниченной и равномерно непрерывной функцией.

Для проверки этого условия рассмотрим отображение $\Phi(y(t, \lambda)) = f(t, y(t, \lambda), \lambda)$

пространства $V(M_\delta \times \Lambda) \in Y(M_\delta \times \Lambda)$.

По I.16д (где аргумент x над. заменить

на пару (t, λ)) отображение $\Phi(y(t, \lambda))$

является ограниченной и равномерно непрерывной функцией от $y(t, \lambda)$. Тем более,

если мы ограничимся только функциями $y(t)$, не зависящими от λ , оно будет ограниченной и равномерно непрерывной функцией от $y(t) \in V(M_\delta)$ и $\lambda \in \Lambda$ с значениями в $Y(M_\delta)$.

Оператор интегрирования, фигурирующий далее в (4), фиксирован и результат также будет ограниченной и равномерно непрерывной функцией от $y(t)$ и λ , что и требуется.

б. Функция $F[y(x), \lambda]$ имеет в $V(M_\delta) \times \Lambda$

ограниченную и равномерно непрерывную производную по $y(x)$.

По условию $f(x, y, \lambda): M_\delta \times V \times \Lambda \rightarrow Y$ имеет ограни-

ченную и равномерно непрерывную производную по y . Поэтому

отображение $\Phi(y(t, \lambda)) = f(t, y(t, \lambda), \lambda)$, которое мы

рассмотрели в а, в силу I.48 (где также аргумент x нужно

заменить на пару (t, λ)) будет иметь ограниченную и равномерно

непрерывную производную (в $V(M_\delta \times \Lambda)$). Тем более

оно будет иметь ограниченную и равномерно непрерывную производ-

ную, если мы ограничимся только функциями $y(t)$, независи-

мыми от λ . Далее оператор интегрирования, фигурирующий в

(4) фиксирован, и по I.31 результат будет также обладать ограни-

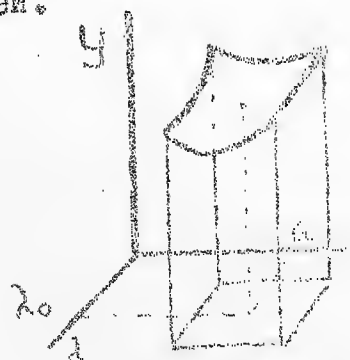
ченной и равномерно непрерывной производной по $y(t)$. Это и

доказано б.

в. Оператор $\frac{\partial F[y_0(x), \lambda_0]}{\partial y}$ обратим.

Действительно, для $y = y_0(x)$ и $\lambda = \lambda_0$ мы имеем

$$\frac{\partial F[y_0(x), \lambda]}{\partial y} = E - \int_a^b \frac{\partial f(\xi, y_0(\xi), \lambda_0)}{\partial y} d\xi \quad (5)$$



Поскольку $C = \sup_{x \in M_\delta} \left| \frac{\partial f(x, y_0(x), \lambda_0)}{\partial y} \right|$ и число δ

выбрано так, чтобы иметь $\delta C < 1$, вычитаемое в правой части (7) будет иметь норму в $V(M_\delta)$, меньшую 1. Вся правая часть в (7), как оператор, отстоящий от единичного по норме меньше, чем на 1, будет обратима, что нам и требуется.

Теперь мы вправе применить теорему о неявной функции; применяя ее, приходим к утверждению теоремы.

2.43. Этим же путем можно получить и дифференцируемость решения $y(t, \lambda)$ по параметру λ , если только потребовать дифференцируемости по λ функций $f(t, y, \lambda)$ и $\psi(\lambda)$.

Теорема. Если в условиях теоремы 2.42 параметр λ меняется в шаре $Q_\tau = \{\lambda \in \Lambda : |\lambda - \lambda_0| \leq \tau\}$ нормированного пространства Λ и функция $f(t, y, \lambda)$, кроме производной по y , имеет равномерно непрерывную и ограниченную производную по λ , то существуют такие $\delta > 0$ и $\tau > 0$, что в области $M_\delta \times Q_\tau$ определена C^1 -функция $y(t, \lambda)$, являющаяся решением уравнения (1) с условием (2).

Доказательство. Достаточно проверить выполнение соответствующего условия теоремы о неявной функции — именно наличием ограниченной и равномерно непрерывной производной по λ у отображения $F(y(t), \lambda)$ (2.42 (4)). Используя условие теоремы, мы немедленно получаем дифференцируемость отображения $F(y(t), \lambda)$ по λ , а явное выражение этой производной

$$\frac{\partial F(y(t), \lambda)}{\partial \lambda} = - \left(\psi'(\lambda) + \int_a^t \frac{\partial f(\xi, y(\xi), \lambda)}{\partial \lambda} d\xi \right)$$

показывает, что все нужные условия на $\frac{\partial F(y(t), \lambda)}{\partial \lambda}$ выполняются. Теорема доказана.

2.44. Производная по начальному условию. Рассмотрим снова дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) : M_n \times V \rightarrow Y \quad (I)$$

с начальным значением $y(a)$, пробегающим шар $V_\rho(b_0)$:

$$y(a) = b \in Y, \quad |b - b_0| \leq \rho \quad (2)$$

Будем считать, что выполняются условия теоремы 2.42 – 2.43 так что решение $y(x)$ задачи (1) – (2) существует и единственно, для каждого $b \in V_\rho(b_0)$ (с сохранением точки a). Получающееся семейство решений мы обозначим $y(t, b)$; все они определены для некоторого промежутка $|t - a| \leq \delta$. Как именно зависит величина y от b ? Для этого полезно вычислить производную $\frac{\partial y(x, b)}{\partial b}$, которая существует по 2.42. Дифференцируя по b равенство

$$y(x, b) = b + \int_a^x f(\xi, y(\xi, b)) d\xi$$

находим

$$\frac{\partial y(x, b)}{\partial b} = E + \int_a^x \frac{\partial f(\xi, y(\xi, b))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(\xi, b)}{\partial b} d\xi$$

Функция под знаком интеграла непрерывна по нашим предположениям и по теореме 2.42, так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\xi, y(\xi, b))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(\xi, b)}{\partial b} &= \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(a, b)}{\partial b} + o(x-a) = \\ &= \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} + o(x-a), \end{aligned}$$

поскольку $y(a, b) = b$ и, следовательно, $\frac{\partial y(a, b)}{\partial b} = E$. Поэтому

$$\frac{\partial y(x, b)}{\partial b} = E + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (x-a) + o(x-a).$$

Эта формула показывает при достаточно малом $x-a$ направление и скорость изменения величины $y(t, b)$ в зависимости от изменения b .

Из этой же формулы видно, что при малых $|x-a|$ оператор $\frac{\partial y(x, b)}{\partial b}$ отличается по норме от E меньше, чем на единицу и потому обратим. В силу теоремы об обратной функции 2.17 отображение $y(t, b)$ при каждом фиксированном t с

достаточно малым $|t-a|$ переводит некоторый шар $B_\rho = \{v: |v-v_0| \leq \rho\} \subset U$ диффеоморфно в некоторую область $y(t, v) \subset U$, т.е. окрестность $U \subset U$ точки v_0 - в окрестность V точки $y(t, v_0)$; в частности, мы видим, что у точки $y(t, v_0)$ имеется окрестность - именно, V , - через каждую точку которой проходит интегральная кривая, начинающаяся в окрестности U .

2.45. Локальная динамическая система.

График решения $y = y(t)$ уравнения $y'(t) = \Phi(t, y)$ есть кривая в пространстве $T \times U$. Подограф этого решения есть кривая в пространстве U . Если придать аргументу t смысл "времени", то решение $y = y(t)$ задает закон движения точки в пространстве U со скоростью $\Phi(t, y)$. Поэтому совокупность решений $y = y(t)$ называют динамической системой, точнее, имея в виду локальную точку зрения, локальной динамической системой. Общая картина значительно упрощается, если $\Phi(t, y)$ не зависит от t , так что исходное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \quad (y \in U \rightarrow U) \quad (I)$$

Функция $\Phi(y)$ предполагается в дальнейшем имеющей непрерывную производную. В данном случае локальная динамическая система представляется, как поток некоей среды, скорость которой в каждой точке задается вектором $\Phi(y)$ и не зависит от времени. Решения $y = y(t)$ называются траекториями системы; как вытекает из 2.41 - 2.42 две траектории или не пересекаются, или целиком совпадают*. Если для некоторого y_0 имеем $\Phi(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ (const) является очевидным решением уравнения (I); соответствующая траектория вырождается в одну точку. Пусть $x_0 = \Phi(y_0) \neq 0$ по непрерывности $\Phi(y) \neq 0$ в некоторой окрестности точки y_0 ; в этой окрестности неподвижных точек нет, все точки с течением времени фактически перемещаются

* Если $y_1(t_1) = y_2(t_2) = p \in U$, то $y(t_1+t) \equiv y(t_2+t)$, т.е. обе эти функции от t удовлетворяют одному и тому же уравнению с общим начальным условием

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y), \quad y(0) = p.$$

по своим траекториям. Моделью такой динамической системы может служить движение точек твердого тела при поступательном его перемещении с постоянной скоростью. Оказывается, что общий случай приводится к этому с помощью некоторого локального диффеоморфизма в пространстве Y , переводящего динамическую систему в окрестности точки y_0 в семейство отрезков, проходящих с постоянной скоростью. Для доказательства предположим, что

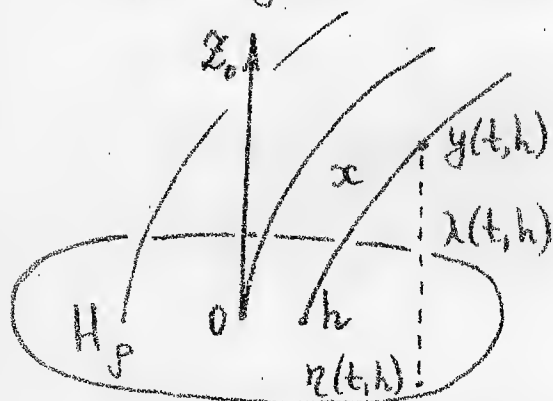
$y_0 = 0$ (чего всегда можно добиться переносом) и что существует непрерывный линейный функционал $f(y): Y \rightarrow \mathbb{R}$, такой, что $f(z_0) \neq 0$ (в гильбертовом пространстве Y можно положить $f(y) = (y, z_0)$; в банаховом пространстве существование такого функционала обеспечивается теоремой Хана-Банаха (см., например, Г.Е. Шиллов, Математический анализ. Специальный курс, 2 издание, М., 1961, Дополнение, § 2, стр. 426). Рассмотрим подпространство $H = \{h \in Y: f(h) = 0\}$; оно замкнуто и не содержит z_0 . Пусть далее L — одномерное подпространство, порожденное вектором z_0 ; утверждается, что все пространство Y есть прямая сумма L и H . Действительно, для любого $y \in Y$ и $h = y - \frac{f(y)z_0}{f(z_0)}$ очевидно имеем $f(h) = 0$,

так что $h \in H$ и $y = h + z$, где $z = \frac{f(y)}{f(z_0)} z_0 \in L$, причем это разложение единственно, так как L и H имеют единственную общую точку 0 . В подпространстве H рассмотрим шар $H_\rho = \{h \in H, |h| \leq \rho\}$ и в подпространстве L — отрезок $T_\delta = \{tz_0, |t| \leq \delta\}$. Поставим в соответствие каждой паре $(t, h) \in T_\rho \times H_\rho$ точку $y(t, h)$ — соответствующее значение решения уравнения (I) при начальном условии $y(0, h) = h$. При достаточно малых δ и ρ величина $y(t, h)$ определена на основании 2.42. Проверим, что отображение $(t, h) \rightarrow y(t, h)$ есть исконый диффеоморфизм. Мы имеем

$$y(t, h) = \varphi(t, h) + \lambda(t, h) z_0$$

где $\varphi(t, h) \in H$, $\lambda(t, h) \in \mathbb{R}$.

Заметим, что функция $y(t, h)$ непрерывна по совокупности (t, h) (поскольку в 2.42 непрерывность по параметру λ была доказана в пространстве функций $y(t, \lambda)$ с метрикой по t); отсюда следует,



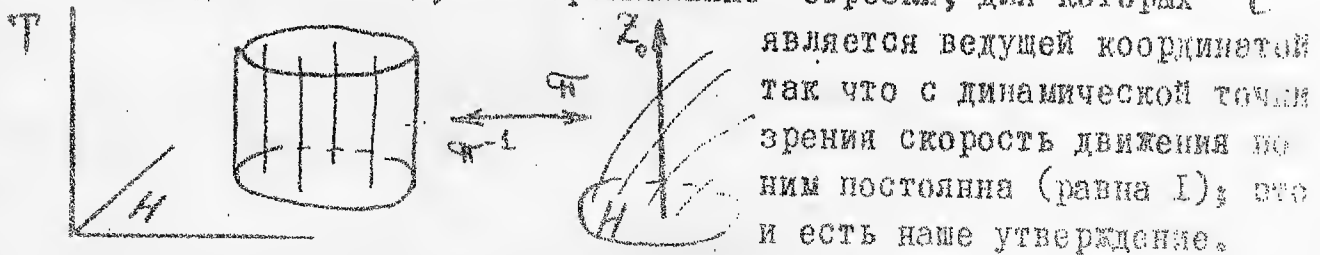
что и составляющие $\eta(t, h)$ и $\lambda(t, h)$ непрерывны по (t, h) . Функция $y(t, h)$ имеет производную по t , равную $\Phi(y)$ в силу уравнения (I); отсюда следует, что и функции $\eta(t, h)$ и $\lambda(t, h)$ имеют производные по t равные соответствующим составляющим от $\Phi(y)$; эти составляющие разумеется непрерывны вместе с самой функцией Φ . При $t=0$, $h=0$ они, как составляющие вектора $\Phi(0)=Z_0$, имеют значения 0 и 1. Далее, функция $y(t, h)$ имеет производную по h (2.44), которая также непрерывна по (t, h) . Из равенства $y(0, h)=h$ следует, что $\frac{\partial \eta(0, h)}{\partial h} = \frac{\partial y(0, h)}{\partial h} = E_n$ (тождественный оператор в H). В силу I.48 функция $y(t, h)$ дифференцируема по паре (t, h) ; ее производная естественно записывается с помощью матрицы

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \lambda(t, h)}{\partial t} & \frac{\partial \lambda(t, h)}{\partial h} \\ \frac{\partial \eta(t, h)}{\partial t} & \frac{\partial \eta(t, h)}{\partial h} \end{array} \right\|$$

При $t=0$, $h=0$ эта матрица принимает вид

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & \frac{\partial \lambda(0, 0)}{\partial h} \\ 0 & E_n \end{array} \right\|$$

которая обратима по I.14и. Теперь из I.57б вытекает, что отображение $\pi: (t, h) \rightarrow y(t, h)$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля пространства $T \times H$ на окрестность нуля в пространстве Y . Обратный диффеоморфизм π^{-1} переводит траектории локальной динамической системы, построенной по уравнению (I), в "вертикальные" отрезки, для которых t



является ведущей координатой так что с динамической точки зрения скорость движения по ним постоянна (равна 1); это и есть наше утверждение.

2.46. Первые интегралы.

а. Рассмотрим совокупность решений уравнения

$$\frac{dy}{dt} = F(y)$$

(1)

в окрестности V точки $y_0 \in Y$ с $F(y_0) \neq 0$. Числовая C^1 функция $z(y)$, определенная в V , называется первым интегралом уравнения (1) (точнее, локальным первым интегралом), если она постоянна на каждой траектории этого уравнения. Используя диффеоморфизм \mathcal{K} , построенный в 2.45, можно дать удобное описание всех первых интегралов уравнения (1). Именно, диффеоморфизм \mathcal{K}^{-1} переводит всякий первый интеграл $z(y)$ в C^1 функцию $z(t, h): T_\delta \times H_p \rightarrow R_1$, постоянную на вертикальных отрезках множества $T_\delta \times H_p$. Такая функция задается однозначно своими значениями при $t=0$, $z(0, h) = \psi(h)$, причем $\psi(h): H_p \rightarrow R_1$ функция, обладающая непрерывной производной по $h \in H$. Обратно, если на H_p задана произвольная функция $\psi(h): H_p \rightarrow R_1$ с непрерывной производной, то функция $z(t, h) = \psi(h): T_\delta \times H_p \rightarrow R_1$, имеет непрерывную производную по аргументу (t, h) и диффеоморфизм \mathcal{K} переводит ее в C^1 функцию $z(y)$, постоянную на траекториях, т.е. в первый интеграл уравнения (1). Замечая, что при диффеоморфизме \mathcal{K} множество H_p переходит тождественно в себя, мы видим, что всякий первый интеграл уравнения (1) однозначно задается своими значениями на H_p , которые образуют на H_p функцию с непрерывной производной; его значения в остальных точках Y в окрестности V получаются из условия постоянства на каждой траектории.

б. Если $Y = R_n$ так что можно считать, что $H = R_{n-1}$ картина еще более проясняется. А именно, оказывается, что в некоторой окрестности точки $y_0 \in Y$ с $F(y_0) \neq 0$ всегда существует $n-1$ функционально независимых (2.235) первых интеграла уравнения (1); с другой стороны, всякий первый интеграл этого уравнения в некоторой окрестности точки y_0 есть C^1 функции от любых фиксированных функционально независимых $(n-1)$ интегралов. Для доказательства первой части утверждения возьмем в H_p какие-либо координаты h_1, \dots, h_{n-1} в $T_\delta \times H_p$ функции $z_1(t, h) = h_1, \dots, z_{n-1}(t, h) = h_{n-1}$ постоянны на вертикальных отрезках и, очевидно, функционально независимы; следовательно, их образы $z_1(y), \dots, z_{n-1}(y)$ при диффеоморфизме \mathcal{K} являются $n-1$ независимыми первыми интегралами

уравнения (I). С другой стороны, если имеются какие-то независимые первые интегралы $z_1(y), \dots, z_{n-1}(y)$, то при диффеоморфизме π^{-1} они перейдут в функции $z_1(t, h), \dots, z_{n-1}(t, h)$, постоянные на вертикальных отрезках и также функционально независимые, так что ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial t} & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial t} & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_{n-1}} \end{vmatrix}$$

равен $n-1$. Но так как первый столбец этой матрицы состоит из нулей, то

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Таким образом, функции $z_1(0, h), \dots, z_{n-1}(0, h)$ осуществляют диффеоморфизм некоторой окрестности $U(0) \subset H_p$ в некоторую область $V \subset R_{n-1}$. Поэтому всякая C^1 функция $\psi(h)$ в $U(0)$ может быть представлена в виде $\psi(h) = F(z_1(0, h), \dots, z_{n-1}(0, h))$ (2.176) с C^1 -функцией $F(z_1, \dots, z_{n-1})$. Возьмем теперь любой первый интеграл $z(y)$ уравнения (I), при диффеоморфизме π^{-1} он перейдет в функцию $z(t, h)$, зависящую только от h , и по доказанному представится в виде $F(z_1(0, h), \dots, z_{n-1}(0, h)) = F(z_1(t, h), \dots, z_{n-1}(t, h)) = F(z_1(y), \dots, z_{n-1}(y))$, что и требовалось.

в. Даже неполный набор из $k \leq n-1$ независимых первых интегралов дает нам ценную информацию о траекториях системы. Именно, если известны $k \leq n-1$ независимых первых интеграла, положим $z_1(y), \dots, z_k(y)$, то при любом наборе постоянных C_1, \dots, C_k (в некоторой окрестности значений $C_1^0 = z_1(y_0), \dots, C_k^0 = z_k(y_0)$) уравнения

$$z_1(y) = C_1, \dots, z_k(y) = C_k \quad (I)$$

определяет (по 2.25) $n-k$ -мерное многообразие $M(c_1, \dots, c_k) \subset Y$. При этом, если некоторая траектория уравнения (I) пересекается с каким-либо из многообразий $M(c_1, \dots, c_k)$, то она лежит в нем целиком, поскольку функции $z_1(y), \dots, z_k(y)$ сохраняют на этой траектории свои значения. Чем больше k , тем меньшую размерность имеют многообразия $M(c_1, \dots, c_k)$ и тем более точные сведения мы получаем о расположении траекторий. Наконец, если $k = n-1$, то уравнения (I) определяют одномерные многообразия, следовательно, сами траектории.

г. В некоторых случаях, не зная траекторий уравнения (I) заранее, можно фактически найти $n-1$ независимых первых интеграла в окрестности заданной точки y_0 . Тогда уравнения (I) определяют нам неявным образом сами траектории.

Пример. Пусть $Y = R_3$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ и дано уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \{y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2\} \quad (2)$$

или, в скалярной форме, система уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 - y_3, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_3 - y_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = y_1 - y_2. \quad (3)$$

Нас интересуют траектории уравнения (2) - или, что то же, системы (3). Складывая уравнения (3), находим

$$\frac{d(y_1 + y_2 + y_3)}{dt} = 0$$

Отсюда следует, что на каждой траектории системы (3) выполняется равенство $y_1 + y_2 + y_3 = \text{const}$, так что функция

$z_1(y) = y_1 + y_2 + y_3$ является первым интегралом системы (3).

Далее, умножая уравнения системы (3) соответственно на

y_1, y_2, y_3 и складывая, получаем

$$\frac{y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3}{dt} = y_1(y_2 - y_3) + y_2(y_3 - y_1) + y_3(y_1 - y_2) = 0,$$

откуда находится другой первый интеграл $z_2(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

Матрица

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{vmatrix}$$

имеет ранг 2 всюду, кроме точек прямой $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^3: y_1 = y_2 = y_3\}$. Заметим, что точки этой прямой, очевидно, являются неподвижными точками системы (3). В окрестности любой другой точки $y \notin \gamma$ траектории локально определяются уравнениями

$$y_1 + y_2 + y_3 = \text{const} \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \text{const}$$

мы видим, что они являются окружностями, ортогональными прямой γ , с центрами, лежащими на этой прямой.

2.47. Линейные уравнения в частных производных. Пусть в каждой точке y области G банахова пространства Y задана C^1 -функция $\Phi(y)$ с значениями в том же пространстве Y , — иначе говоря, векторное C^1 -поле $\Phi(y)$. Будем искать C^1 -функцию $z(y): G \rightarrow \mathbb{R}_1$ из уравнения

$$z'(y) \Phi(y) = 0 \quad (4)$$

(Напомним, что $z'(y)$ — есть линейный оператор из Y в \mathbb{R}_1 , так что левая часть в (4) есть результат применения оператора $z'(y)$ к вектору $\Phi(y)$). В соответствии с 1.47г уравнение (4) означает, что в каждой точке $y \in G$ производная функции $z(y)$ по направлению вектора $\Phi(y)$ равна 0. Рассмотрим в области G уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \quad (5)$$

На каждой траектории уравнения (5) искомая функция $z(y)$ становится функцией от параметра t , и уравнение (4) означает, что производная этой функции равна 0. Таким образом, искомая функция $z(y)$ должна быть постоянной вдоль каждой траектории уравнения (5), иными словами, должна быть первым интегралом этого уравнения. Очевидно, что верно и обратное, каждый первый интеграл уравнения (5) является и решением уравнения (4). Таким образом, вопрос о решениях уравнения (4) приводится к вопросу о первых интегралах уравнения (5). В пространстве \mathbb{R}_n с фиксированным базисом имеем

$$\Phi(y) = \{ \Phi_1(y), \dots, \Phi_n(y) \}, \quad z = z(y_1, \dots, y_n)$$

$$z'(y) \Phi(y) = \frac{\partial z}{\partial y_1} \Phi_1(y) + \dots + \frac{\partial z}{\partial y_n} \Phi_n(y)$$

и уравнение (4) становится линейным однородным уравнением в частных производных. Для уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy_j}{dt} = \Phi_j(y) \quad (j=1, \dots, n) \quad (6)$$

как нам уже известно из 2.46б, в пространстве $Y = R_n$ в окрестности любой не неподвижной точки уравнения (6) имеются $n-1$ функционально независимых первых интеграла, положим $z_1(y), \dots, z_{n-1}(y)$, и любой первый интеграл может быть выражен через них по формуле

$$z(y) = \Psi(z_1(y), \dots, z_{n-1}(y))$$

где $\Psi(z_1, \dots, z_{n-1})$ некоторая (произвольно выбранная) функция с непрерывной производной.

Так для уравнения в R_3

$$\frac{\partial z}{\partial y_1}(y_2 - y_3) + \frac{\partial z}{\partial y_2}(y_3 - y_1) + \frac{\partial z}{\partial y_3}(y_1 - y_2) = 0 \quad (7)$$

соответствующая динамическая система определяется из уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \{y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2\}$$

рассмотренного в \underline{v} , и вне прямой $\gamma = \{y \in R_3 : y_1 = y_2 = y_3\}$ известны ее два первых интеграла:

$$z_1(y) = y_1 + y_2 + y_3, \quad z_2(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2;$$

поэтому в окрестности любой точки $y \notin \gamma$ любое решение уравнения (7) описывается формулой

$$z(y) = \Psi(y_1 + y_2 + y_3, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

где $\Psi(z_1, z_2)$ — любая функция с непрерывной производной.

Неоднородное уравнение

$$z'(y) \cdot \Phi(y, z) = \Psi(y, z) \quad (y \in R_1 \rightarrow R_1)$$

легко приводится к однородному в пространстве $Y \times R_1$ (см. задачу 28).

§ 2.5. Дифференциальные уравнения (нелокальные теоремы).

2.51. В § 2.4 свойства решений дифференциального уравнения изучались в окрестности некоторой фиксированной точки; здесь мы рассмотрим свойства решений в больших областях. Пусть Y банахово пространство; в области $G \subset \mathbb{R}_1 \times Y$ (возможно, неограниченной) рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(t, y) \quad (1)$$

Будем называть подобласть $Q \subset G$ регулярной, если для некоторого $\eta > 0$ всякий шар радиуса η с центром в точке $\alpha \in Q$ целиком содержится в G . Функция $\Phi(t, y)$ в (1) предполагается непрерывной в G , а в любой регулярной подобласти $Q \subset G$ ограниченной

$$|\Phi(t, y)| \leq A_Q \quad (2)$$

и удовлетворяющей условию Липшица по y :

$$|\Phi(t, y_1) - \Phi(t, y_2)| \leq B_Q |y_1 - y_2| \quad (3)$$

В этих предположениях, в силу 2.41, через каждую точку $(t_0, y_0) \in G$ проходит единственное решение уравнения (1):

$$y(t) \equiv y(t, t_0, y_0), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4)$$

Это решение, определенное в некотором интервале $|t - t_0| < \sigma$, может не продолжаться на сколько-нибудь больший промежуток изменения t , например, потому, что при каком-то конечном значении $t = t_1$ оно войдет в границу области G . Покажем, что только такое обстоятельство и может служить причиной непродолжимости решения на всю ось t .

Теорема. Любое решение (4) может быть продолжено в обе стороны по t до выхода из любой регулярной подобласти $Q \subset G$.

Доказательство. Для данного решения (4) найдем наибольший полуинтервал $[t_0, \beta)$, на котором определено это решение; такой наибольший полуинтервал может быть определен как объединение всех полуинтервалов $[t_0, \beta')$ на которых решение (4) существует. (Заметим при этом, что величина $y(t, t_0, y_0)$, если она существует, определена однозначно, поскольку теорема единственности (2.41) запрещает двум решениям разделиться в области G). Допустим, что $\beta < \infty$; рассмотрим любую послед-

довательность значений $t_n \in [t_0, \beta)$, $t_n \rightarrow \beta$, и соответствующую последовательность точек $(t_n, y(t_n))$. Предположим, что дуга $(t, y(t))$ при $t \in [t_0, \beta)$ остается в регулярной подобласти $Q \subset G$, так что величины $\Phi(t, y(t))$ ограничены постоянной A_Q из (2). Тогда для $m < n$ мы имеем

$$|y(t_n) - y(t_m)| \leq \sup_{t_m \leq t \leq t_n} \left| \frac{dy(t)}{dt} \right| (t_n - t_m) \leq A_Q (t_n - t_m).$$

Таким образом, последовательность $y(t_n)$ фундаментальна в пространстве Y ; обозначим ее предел через \bar{y} . В силу непрерывности функции $\Phi(t, y)$ имеем $\Phi(\beta, \bar{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t_n, y_n)$

поэтому, присоединяя к полуоткрытой дуге $(t, y(t))$, $t \in [t_0, \beta)$ точку (β, \bar{y}) , мы получаем замкнутую дугу $(t, y(t))$, $t \in [t_0, \beta)$ с непрерывной касательной, т.е. решение уравнения (I). В силу теоремы 2.4I решение может быть продолжено за значение

$t = \beta$ в противоречие с предположением. Следовательно, или $\beta = \infty$, или, при $\beta < \infty$, точки $(t, y(t))$ при $t \in [t_0, \beta)$ выходят из любой регулярной подобласти $Q \subset G$, что и утверждалось. В другую сторону ($t \rightarrow -\infty$) теорема доказывается аналогично.

2.52. В дальнейшем мы распространим теоремы о непрерывной и дифференцируемой зависимости решения от начального условия на большие интервалы изменения t . Нам понадобятся следующие леммы:

Л е м м а I. Если функция $\varphi(t)$, определенная и непрерывная в промежутке $[0, T]$, удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)| \leq M \left(1 + k \int_0^t |\varphi(\tau)| d\tau \right) \quad (1)$$

то она удовлетворяет в $[0, T]$ также и неравенству

$$|\varphi(t)| \leq M e^{kMt} \quad (2)$$

Доказательство. Положим

$$\int_0^t |\varphi(\tau)| d\tau = v(t)$$

Неравенство (I) можно записать в виде

$$v'(t) \leq M(1 + kv(t)), \quad (3)$$

2-го lemma 1

где

$$\frac{v'(t)}{M(1+kv(t))} \leq 1$$

при всех $t \in [0, T]$

интегрируем

$$\int_0^{t_0} \frac{v'(t) dt}{M(1+kv(t))} \leq t_0$$

интеграл слева вычисляется
и дает:

$$M(1+kv(t)) \leq Me^{kMt}$$

Обозначим с

$$v'(t) \leq M(1+kv(t))$$

получаем все необходимое

Для $t_0 = 0$ вместо $y(t, t_0, y_0)$ будем писать $y(t, y_0)$.

Л е м м а 2. Пусть кривая $\{y(t, y_0), t\}$, $0 \leq t \leq T$ — решение уравнения 2.5I (I), расположенная целиком в регулярной подобласти Q области $G (= Y \times R_1)$. Утверждается, что существует такое $\tau > 0$, что всякое решение $y(t, y_1)$, $|y_0 - y_1| < \tau$, также определено для значений $0 \leq t \leq T$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что 3ε — расширение области Q лежит целиком в области G . Тогда ε — расширение H_1 и 2ε — расширение H_2 области Q являются вместе с Q регулярными подобластями и в частности в H_2 выполняется условие Липшица

$$|\phi(y, t) - \phi(z, t)| \leq B|y - z|$$

с фиксированной постоянной B для любых $(y, t), (z, t)$ из H_2 . Положим $\tau = \varepsilon e^{-B\beta}$ и рассмотрим любое решение $y(t, y_1)$ с $|y_0 - y_1| < \tau$. Пусть $[0, \beta)$ наибольший полуинтервал, для которого точка $(y(t, y_1), t)$ определена и находится в области H_2 ; покажем, что $\beta \geq T$. Пусть $\beta < T$. Решения $y(t, y_1)$ и $y(t, y_0)$ удовлетворяют соотношениям

$$y(t, y_1) = y_1 + \int_0^t \phi(y(\tau, y_1), \tau) d\tau,$$

$$y(t, y_0) = y_0 + \int_0^t \phi(y(\tau, y_0), \tau) d\tau.$$

Отсюда при $0 \leq t < \beta$

$$\begin{aligned} |y(t, y_1) - y(t, y_0)| &\leq |y_1 - y_0| + \int_0^t |\phi(y(\tau, y_1), \tau) - \phi(y(\tau, y_0), \tau)| d\tau \\ &\leq \tau + B \int_0^t |y(\tau, y_1) - y(\tau, y_0)| d\tau \end{aligned}$$

По лемме I имеем при $t < \beta$

$$|y(t, y_1) - y(t, y_0)| \leq \tau e^{B\beta} \leq \varepsilon \quad (4)$$

Таким образом, кривая $\{y(t, y_1), t\}$ при $0 \leq t < \beta$ лежит в регулярной подобласти H_1 . Но тогда по 2.5I решение

$y(t, y_1)$ может быть продолжено за значение $t = \beta$, причем для достаточно малых $t - \beta$ оно будет лежать в пределах области H_2 в противоречие с предположением. Лемма доказана.

2.53. Теорема о глобальной непрерывности. Пусть кривая $\{y(t, y_0), t\}, 0 \leq t \leq T$ — дуга решения уравнения (I), целиком расположенная в регулярной подобласти Q области G . По 2.52 при некотором $\tau > 0$ существуют решения $y(t, y_1)$ для всех $y_1, |y_1 - y_0| < \tau$ и для $t \leq T$. Утверждается, что точка $y(T, y_1)$ непрерывно зависит от y_1 .

Доказательство. Достаточно рассмотреть последовательность точек $y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(m)} \rightarrow y_0$ и показать, что $y(T, y_1^{(m)}) \rightarrow y(T, y_0)$. Оценка 2.52 (4) для $y_1 = y_1^{(m)}, \tau = \tau_m = |y_1^{(m)} - y_0|, t = T$ дает

$$|y(T, y_0) - y(T, y_1^{(m)})| \leq \tau_m e^{\tau_m T} \rightarrow 0,$$

что и требуется.

2.54. Теорема о глобальной дифференцируемости. Если в условиях 2.51 функции $\phi(y, t)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial y}$, то в предположениях 2.53 точка $y(T, y_0)$ зависит от y_0 дифференцируемым образом.

Доказательство. В силу 1.43а величина $\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial y}$ оценивается в каждой регулярной подобласти Q постоянной из условия Липшица:

$$\left\| \frac{\partial \phi(y, t)}{\partial y} \right\| \leq B_Q.$$

Все ближайшие построения мы будем проводить в пределах области U — объединения всех шаров радиуса $\tau(\varepsilon)$ (из леммы 2.52) с центрами в точках кривой $y(t, y_0), 0 \leq t \leq T$. Пусть (\bar{t}, \bar{y}) фиксированная точка на этой кривой. Как следует из 2.45 решение $y(t, \bar{t}, \bar{y})$ (совпадающее на самом деле с решением $y(t, y_0)$ в силу теоремы единственности) является дифференцируемым по \bar{y} при каждом t , отстоящем от \bar{t} менее, чем на $\delta_0 = \min(\varepsilon/B_Q, 1/\Lambda_Q)$. Разобьем отрезок $[0, T]$ точками деления $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, так чтобы иметь $t_{j+1} - t_j < \delta_0$. Тогда мы получим:

$y_1 = y(t_1, y_0)$ — дифференцируемая функция от y_0 ;

$y_2 = y(t_2, t_1, y_1)$ — дифференцируемая функция от y_1 ;

.....

$y_m = y(t_m, t_{m-1}, y_{m-1})$ — дифференцируемая функция от y_{m-1} .

По теореме о дифференцируемости сложной функции, примененной должное число раз, мы получаем, что $y_m = y(T, y_0)$ — дифференцируемая функция от y_0 ; это и утверждалось.

2.55. Уравнение во всем пространстве. Пусть в условиях 2.51 область $G \subset Y \times R_1$ совпадает со всем пространством $Y \times R_1$. Тогда для решения $y(t, y_0)$ как следует из 2.51, возможны только два типа поведения при возрастании t : либо решение $y(t, y_0)$ определено при всех $t, 0 \leq t < \infty$, либо при конечном значении $t = t_0$ решение $y(t, y_0)$ становится неограниченным по y . (Вторая ситуация реализуется в примере $\frac{dy}{dt} = y^2$ в $R_1 \times R_1$; решение, отвечающее начальному значению $y_0 = \frac{1}{a} > 0$ при $t = 0$, имеет вид $y = \frac{1}{a-t}$, и продолжается в положительном направлении t лишь до значения $t = a$).

Естественно возникает вопрос, какие условия на функцию $\phi(y, t)$ обеспечивают существование решения $y(t, y_0)$ при всех $t, 0 \leq t < \infty$. Покажем, что таким условием является выполнение неравенства

$$|\phi(y, t)| \leq A_t + B_t \cdot |y|, \quad (I)$$

где постоянные A_t и B_t равномерно ограничены в любой ограниченной области изменения t . Для доказательства, как и раньше, рассмотрим наибольший полуинтервал $[0, \beta)$, на котором определено решение $y(t, y_0)$; мы желаем показать, что $\beta = \infty$. Пусть $\beta < \infty$. Из уравнения

$$y(t) = y_1 + \int_0^t \phi(y, \tau) d\tau, \quad 0 \leq t < \beta,$$

следует, с учетом (I) неравенство

$$|y(t)| \leq |y_1| + \int_0^t (A_\tau + B_\tau |y|) d\tau \leq |y_1| + \bar{A}_\beta \cdot \beta + \bar{B}_\beta \int_0^t |y| d\tau,$$

где $\bar{A}_\beta = \sup_{0 \leq t < \beta} A_t$, $\bar{B}_\beta = \sup_{0 \leq t < \beta} B_t$. Применяя лемму I из

2.52 находим

$$|y(t)| \leq (|y_1| + \bar{A}_\beta \cdot \beta) \cdot e^{\bar{B}_\beta \cdot \beta}$$

Таким образом, в промежутке $[0, \beta)$ величина $y(t)$ ограничена и следовательно точка $\{y(t), t\}$ остается в регуляр-

ной подобласти области G ; но тогда по 2.51 решение $y(t, y_0)$ может быть продолжено за значение $t = \beta$, в противоречие с предположением. Итак, условие (1) достаточно для неограниченной продолжимости решения $y(t, y_0)$ по t .

Неравенство (1), в частности, заведомо выполняется для линейного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t) \quad (2)$$

с непрерывными (при всех t) коэффициентами $A(t): R_1 \rightarrow L(Y)$ и $B(t): R_1 \rightarrow L(Y)$. Таким образом, всякое решение линейного уравнения (2) с непрерывными коэффициентами $A(t)$ и $B(t)$ может быть продолжено на всю ось t , $-\infty < t < \infty$.

2.56. Далее, как и в 2.45 мы будем интерпретировать решения уравнения $\frac{dy}{dt} = \phi(t, y)$ как кривые в пространстве Y ,

понимая t , как параметр, а решение $y = y(t, y_0)$ — как закон движения точки, находящейся в момент $t=0$ в y_0 , со скоростью $\phi(t, y)$. Как в 2.45, будем далее считать, что $\phi(t, y)$ не зависит от y , так что исходное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \phi(y) \quad (1)$$

Покажем, что справедливо равенство

$$y(t, y(t_1, y_0)) = y(t+t_1, y_0) \quad (2)$$

для всех t_1 и t , для которых определена левая часть. Действительно, если имеет смысл $y(t_1, y_0)$, то в (2) обе стороны совпадают при $t=0$ и во всяком случае определены для малых $t \neq 0$. Для этих t очевидно, что обе стороны удовлетворяют дифференциальному уравнению (1). Но тогда они совпадают при всех t , где они обе определены (поскольку теорема единственности 2.41 запрещает им где-либо разойтись). Если этими значениями t еще не исчерпана область определения правой (левой) части, то в оставшихся точках левую (правую) часть можно доопределить, положив ее равной соответствующим значениям правой (левой) части, причем левая (правая) часть останется решением уравнения (1), обращаясь в $y(t_1, y_0)$ при $t=0$.

2.57. В 2.45 было показано, что у всякой точки $y_0 \in Y$ с $\phi(y_0) \neq 0$ существует окрестность $V(y_0)$ и диффеоморфизм Π , переводящий совокупность точек дуг траекторий уравнения (I), пересекающих $V(y_0)$, в совокупность точек параллельных отрезков, притом проходимых (по t) с постоянной скоростью. Мы обобщим здесь это предложение на большие (по t) отрезки траекторий.

Рассмотрим в окрестности точки $y_0 \in Y$ с $\phi(y_0) \neq 0$ построенное в 1.88 разложение $Y = L + H$, где L — одномерное, а H — замкнутое подпространство в Y , и в подпространстве H — шар $H_p = \{h \in H, |h| \leq p\}$, который в произведении с отрезком T_σ составляет область значений диффеоморфизма Π . Можно ли распространить диффеоморфизм Π (определенный в 2.45 для $|t| \leq \sigma$) на большие значения t ? Траектории уравнения (I), рассматриваемые в целом, могут оказаться замкнутыми, могут вторично пересекать шар H_p , поэтому без дополнительных предположений ответ на поставленный вопрос не будет положительным. Наложим на решения уравнения (I) следующее условие:

Условие невозвращения траекторий на промежутке $[-t_1, t_2]$
 $(t_1, t_2 > 0)$ для некоторого $p > 0$: любая траектория $y(t, h)$, $h \in H_p$, $t \in [-t_1, t_2]$ не пересекает более (т.е. при $t \neq 0$) шар H_p .

Тогда распространение диффеоморфизма оказывается возможным:

Теорема: Если траектории $y(t, h)$ определены при $h \in H_p$ и $t \in [-t_1, t_2]$ и на промежутке $[-t_1, t_2]$ выполнено условие невозвращения, то существует диффеоморфизм множества $[-t_1, t_2] \times H_p$ на $y(t, h)$, переводящий точку (t, h) в $y(t, h)$.

Доказательство. Покажем, что отображение $\Pi: (t, h) \rightarrow y(t, h)$ взаимно однозначно. Если бы мы имели при некоторых $t_0 < t_1$, $h_0 \in H_p$, $h_1 \in H_p$, $y(t_0, h_0) = y(t_1, h_1)$, то применяя (2) мы получили бы $y(t_1 - t_0, h_1) = y(-t_0, y(t_1, h_1)) = y(-t_0, y(t_0, h_0)) = y(0, h_0) = h_0$, что при $h_1 \neq h_0$, $t_1 \neq t_0$ противоречит условию невозвращения.

Значит отображение Π взаимно однозначно. Заметим далее, что среди точек $y(t, h)$ ($t \in [t_1, t_2]$, $h \in H_p$) нет неподвижных точек (как вытекает из теоремы единственности); поэтому, на основании 2.45 отображение Π в некоторой окрестности каждой точки (t, h) является диффеоморфизмом (на соответствующую окрестность точки $y(t, h)$). Итак, отображение

$\Pi : (t, h) \rightarrow y(t, h)$ является взаимно однозначным и взаимно дифференцируемым; тем самым оно является диффеоморфизмом, что нам и требовалось.

В частности, если условие невозвращения при некотором $p > 0$ выполняется для всей числовой оси $-\infty < t < \infty$, мы получаем, что совокупность точек всех траекторий $y(t, h)$, $h \in H_p$, $-\infty < t < \infty$ по формуле $y(t, h) \rightarrow (t, h)$ отображается диффеоморфно на совокупность всех точек параллельных прямых $-\infty < t < \infty$, $h \in H_p$.

В условиях этого предложения говорят, что совокупность траекторий $y(t, h)$ ($-\infty < t < \infty$, $h \in H_p$) **в п р я м а я**.

2.58. Уравнения механики системы.

а. Пусть дана механическая система S из n точек y_1, \dots, y_n (R_3) с массами m_1, \dots, m_n . Если на точку y_i действует сила F_i , то движение происходит в соответствии с уравнениями Ньютона

$$m_i y_i''(t) = F_i(y_1, \dots, y_n, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (I)$$

Если система (I) однородна, т.е. $F_i \equiv 0$, то она имеет очевидное решение

$$y_i = \alpha_i + v_i \cdot t \quad (i=1, \dots, n, \quad \alpha_i, v_i - \text{постоянные})$$

отвечающее равномерному и прямолинейному движению каждой точки системы. Отсюда следует, что любые два решения общей системы (I) (неоднородной) приводятся одно к другому наложением некоторого равномерного и прямолинейного движения каждой точки. Этим можно воспользоваться для выбора наиболее подходящей системы координат. Любое частное решение системы (I) определяется однозначно по данным Коши (т.е. величинам $y_i(0)$ и $y_i'(0)$, начальным положениям и начальным скоростям); поэтому любое решение получается из частного решения с $y_i(0) = 0$ и

$y_i'(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$ — начальным равномерным и прямолинейным движением каждой точки.

Систему уравнений 2-го порядка (1) можно переписать как систему 1-го порядка, введя новые неизвестные функции

$$v_i(t) = y_i'(t)$$

(скорости точек системы). Тогда система (1) примет следующий вид

$$\left. \begin{aligned} y_i'(t) &= v_i(t), \\ m_i v_i'(t) &= F_i(y_1, \dots, y_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Можно считать, что мы имеем дело с одним уравнением в $6n$ -мерном пространстве, составленном из координат векторов

$y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n$. Это пространство называют фазовым пространством системы.

Имеются некоторые классические первые интегралы системы (2) — т.е. функции вида $\mathcal{F}(y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n)$, постоянные вдоль каждой траектории. Рассмотрим простейшие из них.

б. Вектор $m_i v_i$ называется количеством движения точки y_i , вектор $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n m_i v_i$ — количеством движения системы S . Мы имеем, очевидно,

$$\mathcal{P}'(t) = \sum_{i=1}^n m_i v_i'(t) = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Поэтому, если силы, действующие на системы таковы, что проекция их суммы на некоторое направление ℓ равна 0, то и проекция вектора $\mathcal{P}'(t)$ на это же направление ℓ равна 0, и, следовательно, проекция \mathcal{P}_ℓ вектора \mathcal{P} на направление ℓ также постоянна. Таким образом, в указанных условиях функция

\mathcal{P}_ℓ является первым интегралом системы S . Если

$\sum_{i=1}^n F_i = 0$, то мы получаем сразу три независимых первых интеграла, соответствующих трем проекциям вектора \mathcal{P} на 3 координатные оси.

в. Вектор $y_i \times m_i v_i$ (векторное произведение) называется моментом количества движения точки y_i (относительно точки 0).

Вектор $M = \sum_{i=1}^n y_i \times m_i v_i$ называется моментом количества движения системы S относительно точки O . Им имеем

$$M'(t) = \sum_{i=1}^n y_i' \times m_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i \times m_i v_i' = \sum_{i=1}^n v_i \times m_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i \times F_i = \sum_{i=1}^n y_i \times F_i.$$

Справа стоит сумма моментов сил F_i . Если силы F_i таковы, что сумма их моментов имеет нулевую проекцию на некоторое направление e , то и вектор $M'(t)$ имеет нулевую проекцию на это направление, значит, проекция M_e самого вектора $M(t)$ на направление e постоянна. Таким образом, функция M_e является в указанных условиях первым интегралом системы S . Если

$\sum_{i=1}^n y_i \times F_i = 0$, то мы получаем три независимых первых интеграла, соответствующих трем проекциям вектора P на координатные оси.

г. Говорят, что числовая функция $U(y_1, \dots, y_n, t)$ является потенциалом системы S , если

$$F_i = - \frac{\partial U(y_1, \dots, y_n, t)}{\partial y_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

Производная по векторному аргументу y_i понимается, как и ранее, как линейный функционал в соответствующем трехмерном пространстве, определенный производными от U по трем осям, например, y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} :

$$\frac{\partial U(y_1, \dots, y_n, t)}{\partial y_i} = \left\{ \frac{\partial U(y_1, \dots, y_n, t)}{\partial y_{i1}}, \dots \right\}$$

Знак - в определении потенциала ставится из соображений удобства, чтобы ускорение, создаваемое силой F_i , имело направление в сторону убывания потенциала. Введем, кроме того, функцию

$$T(S) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{2}$$

называемую кинетической энергией системы S . Уравнения (2) можно теперь записать в виде

$$m_i y_i'(t) = \frac{\partial T}{\partial v_i}$$

$$m_i v_i'(t) = - \frac{\partial U}{\partial y_i}$$

Отсюда вдоль траектории

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \sum \frac{\partial T}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} + \sum \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} =$$

$$= \sum m_i y_i'(t) v_i'(t) - \sum m_i v_i'(t) v_i(t) \equiv 0 \quad . \text{Поэтому}$$

в указанных условиях функция $E = T + U$, называемая полной энергией системы S , является также первым интегралом системы S .

д. Уже приведенные первые интегралы дают возможность приводить к интегралам многие простые задачи механики. В качестве первого примера рассмотрим движение точки с массой 1 в плоскопараллельном поле. Здесь $n=1$, координаты точки мы обозначим x, y, z , соответствующие составляющие скорости через u, v, w . Сила F имеет одну составляющую, отличную от нуля, например,

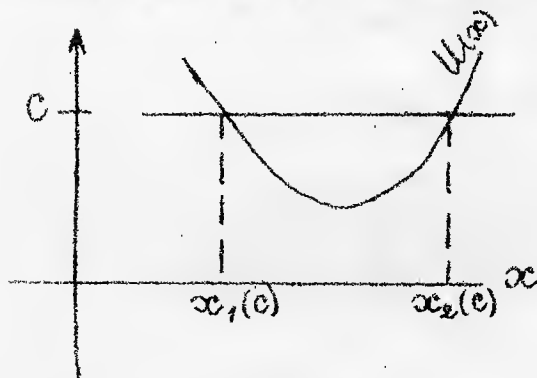
$$F = \left\{ -\frac{\partial U(x)}{\partial x}, 0, 0 \right\}$$

Две составляющие силы равны 0, поэтому имеются два первых интеграла количества движения $v = c_1, w = c_2$.

Таким образом, проекции точки m на оси y и z движутся с постоянными скоростями; можно считать, что они равны 0, если соответственно движущейся взять систему координат. Тогда от движения точки останется только движение вдоль оси x . Момент силы равен 0, и последний нетривиальный первый интеграл дает нам энергия

$$E = \frac{u^2}{2} + U(x) = \text{const} \quad (3)$$

Например, если $U(x)$ имеет вид, показанный на рис. 2.5-I, то



движение с заданной энергией C может происходить лишь в промежутке от $x_1(C)$ до $x_2(C)$. Для фактического получения закона движения в этом промежутке нужно проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$E = C, \text{ заменяя } U \text{ на}$$

Рис. 2.5-I

$\frac{dx}{dt}$; мы получим после разделения переменных

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}$$

отсюда

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{2(E - U(x))}} = dt$$

Если $U'(x_1) \neq 0$, $U'(x_2) \neq 0$, то для времени перехода из x_1 в x_2 получим выражение в виде сходящегося интеграла

$$\Delta t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$

е. Рассмотрим движение точки с массой 1 в осесимметричном поле. В тех же обозначениях, что и в д, и считая ось осью симметрии поля мы можем написать,

$$F = \left\{ -\frac{\partial U(\rho)}{\partial x}, -\frac{\partial U(\rho)}{\partial y}, 0 \right\}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Третья составляющая силы равна 0, поэтому имеется один первый интеграл количества движения $w = c$; таким образом третья составляющая скорости постоянна и можно считать, что она равна 0. Поэтому движение происходит в плоскости x, y . Поскольку сила F центральна, ее момент относительно начала координат равен 0; отсюда имеется первый интеграл момента $(x, y, 0) \times (u, v, 0) = c$, что дает одно нетривиальное соотношение

$$xv - uy = \text{const} \quad (4)$$

Еще одно соотношение дает интеграл энергии

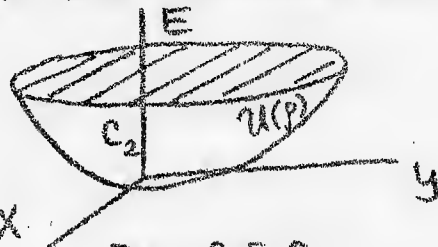


Рис. 2.5-2

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + U(\rho) = c_2 \quad (5)$$

Перейдем в уравнении (4) к полярным координатам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$u = x'(t) = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \varphi' \quad (6)$$

$$v = y'(t) = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \varphi' \quad (7)$$

$$M = xv - uy = \rho \rho' \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \rho^2 \cos \varphi \cdot \varphi' - \rho \rho' \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \rho^2 \sin \varphi \cdot \varphi' = \rho^2 \cdot \varphi' \quad (8)$$

Между прочим, полученная величина имеет простой геометрический смысл: это есть удвоенная производная по t от площади Σ (рис. 2.5-3). Действительно, как видно из рис. 2.5-3, дифференциал площади есть $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$, и, следовательно, производная площади равна $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}(t)$. Поэтому для движения оправедлив закон Кеплера:

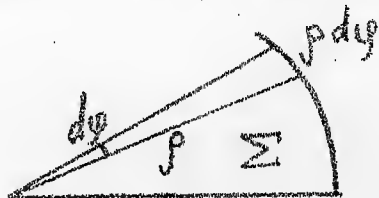


Рис. 2.5-3

в свою очередь находим

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = c_2 - U(r),$$

и, используя (8),

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + \frac{M}{r^2}) = c_2 - U(r)$$

Это дифференциальное уравнение решается в квадратурах

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{2(c_2 - U(r)) - \frac{M}{r^2}}}$$

Чтобы подкоренное выражение оставалось неотрицательным, должны быть выполнены неравенство вида

$$0 \leq r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \leq \infty \quad (9)$$

таким образом, в общем случае движение происходит в кольце, выделенном условиями (9). Наконец, уравнение $M = r^2(t) \cdot \dot{\varphi}(t)$ при известном $r(t)$ позволяет написать и $\varphi(t)$ с помощью одной квадратуры; так как $M/r^2(t)$ не меняет знака, $\varphi(t)$

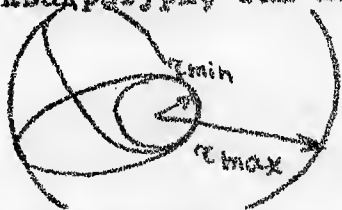


Рис. 2.5-4.

меняется монотонно. Получается движение вида, показанного на рис. 2.5-4. Траектория может быть не замкнутой.

Можно выписать дифференциальное уравнение, связывающее непосредственно r с φ , если перемножить уравнения

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2(c_2 - U(r)) - \frac{M}{r^2}}$$

$$M = r^2 \frac{d\varphi}{dt};$$

Мы получим

$$M dr = r^2 \sqrt{2(c_2 - U(r)) - \frac{M}{r^2}} dr$$

При $U(r) = \frac{k}{r}$ (закон тяготения Ньютона) это уравнение легко интегрируется, и мы получаем (с некоторыми постоянными C и e)

$$r = \frac{C}{1 + e \cos \varphi}$$

Это — фокальное уравнение конического сечения (эллипса при $e < 1$, гиперболы при $e > 1$, парабола при $e = 1$).

ж. Движение точки с массой 1 в сферически симметричном поле. Здесь мы можем написать аналогично

$$F = \left\{ -\frac{\partial U(u)}{\partial x}, -\frac{\partial U(u)}{\partial y}, -\frac{\partial U(u)}{\partial z} \right\}, u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Поскольку сила центральна, ее момент относительно начала координат равен 0, откуда следует постоянство момента количества движения

$$M = (x, y, z) \times (u, v, w) = C$$

Но так как векторы (x, y, z) и (u, v, w) ортогональны M , то и плоскость этих векторов остается неизменной; следовательно, движение плоское. Беря новые оси x, y в плоскости движения и заменяя в ней u на r , мы приводим задачу к предыдущему случаю.

2.59. Обобщенные координаты в механике. Мы теперь для большей симметрии несколько изменим обозначения. Все составляющие векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ по трем осям обозначим подряд через x_1, \dots, x_n (заменяя, в частности, и число $3n$ на n). Производную по времени будем обозначать точкой сверху; положим в частности, $\dot{\varphi}_1 = \dot{x}_1, \dots, \dot{\varphi}_n = \dot{x}_n$. Через F_1, \dots, F_n таким образом обозначим проекции сил на оси. Массу первой точки обозначим через m_1 , ее же — через m_2 и через m_3 ,

так что первые три уравнения Ньютона примут вид $m_1 \ddot{x}_1 = F_1$,
 $m_2 \ddot{x}_2 = F_2$, $m_3 \ddot{x}_3 = F_3$; так же обозначим и остальные массы. Кинетическая энергия системы теперь примет вид

$$T = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2};$$

потенциальная функция U будет функцией аргументов x_1, \dots, x_n .
 Уравнения Ньютона для потенциального силового поля примут вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i(t) &= v_i(t) \\ m_i \dot{v}_i(t) &= - \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Посмотрим, как преобразуются уравнения (I) при переходе к новым координатам.

Пусть $x_i = x_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. C^1 -преобразование координат в пространстве R_n . Мы имеем при этом

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \quad (2)$$

поскольку матрицы $x'(\varphi)$ и $\varphi'(x)$ взаимно обратны. Далее

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_j} \dot{\varphi}_j \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_j} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_k} \dot{\varphi}_j \dot{\varphi}_k \end{aligned} \quad (3)$$

Величины

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j}$$

называются обобщенными импульсами системы.

Можно выразить p_j линейно через $\dot{\varphi}_i$ или через v_i ;

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} = \sum_{i,k} m_i \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_j} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_k} \dot{\varphi}_k = \\ &= \sum_{i,k,s} m_i \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_j} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} \dot{x}_s = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_j} v_i \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда, в частности,

$$\frac{\partial p_j}{\partial v_i} = m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \det \left\| \frac{\partial p_j}{\partial v_i} \right\| = m_1 \dots m_n \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right\|,$$

так что переход от p_j к v_i также обратим. Поэтому функцию T , которая является квадратичной формой от v_i , можно считать также квадратичной формой от q_i или от p_j (с коэффициентами, зависящими от q_i). Функцию U , первоначально зависящую от аргументов x_i можно считать также функцией от q_i . Мы получим сейчас дифференциальные уравнения для q_j и p_j , вытекающие из уравнений (1). Во-первых, мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial T}{\partial v_i} = \sum_{i,s} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial T}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial v_i} = \\ &= \sum \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial T}{\partial p_s} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \frac{\partial T(q, p)}{\partial p_j} \end{aligned} \quad (5)$$

Во-вторых, из (4) мы получаем

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) v_i + \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{v}_i = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ s=1 \\ k=1}}^n m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial x_i}{\partial q_s} q_s - \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial U}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (6)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_s \dot{q}_k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_s} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_s \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_s \dot{q}_k \end{aligned}$$

Меняя местами во втором слагаемом индексы s и k , мы видим, что оно совпадает с первым.

Поэтому

$$\frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q_j} = \sum_{i,s,k} m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_k \dot{q}_s$$

Таким образом (6) (используя (2)) можно записать в виде

$$\dot{p}_j = \frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U(q)}{\partial q_j} = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_j},$$

где $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ называется функцией Лагранжа. Эта функция от переменных \dot{q}_j является квадратичной формой, так же как и ее производная по \dot{q}_j . Если заменить в

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ переменные \dot{q}_j на p_j по формулам (4) — подчеркнем, после дифференцирования по \dot{q}_j , а не до дифференцирования — получится некоторая функция от q_j и p_j . В результате учитывая (5) мы получим систему уравнений I-го порядка

$$\dot{q}_j = \frac{\partial T(q, p)}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_j} \Big|_{\dot{q}_j = A(p)} \quad (7)$$

которые называются уравнениями Лагранжа.

Уравнения Лагранжа, числом $2n$, сводятся к меньшему числу, если система подчинена некоторым связям, в результате которых некоторые из величин q_j при движении не меняются. В этом случае из уравнения (7) видно, что вдоль траектории функция L не зависит от соответствующих импульсов p_j и часть уравнений (7) отпадает.

В качестве применения рассмотрим задачу о колебаниях математического маятника. Система координат показана на рис. 2.5-5.

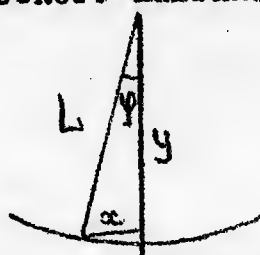


Рис. 2.5-5.

Мы имеем здесь

$$T = m \frac{v^2}{2} = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2},$$

$$U = -mgy$$

Вводим обобщенные координаты $q_1 = \varphi$, $q_2 = L$; так как q_2 не меняется, вместо q_1 будем писать просто φ . Мы имеем

$$x = L \sin \varphi, \quad y = L \cos \varphi,$$

$$\dot{x} = L \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = -L \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad T = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} = m \frac{L^2 \dot{\varphi}^2}{2}$$

Далее для обобщенного импульса получаем выражение

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m L^2 \dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p}{m L^2}$$

и выражение T через p принимает вид

$$T = \frac{p^2}{2 m L^2}$$

Поскольку $U = -m g y = -m g L \cos \varphi$, уравнения Лагранжа таковы

$$\dot{p} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \varphi} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -m g L \sin \varphi, \quad (8)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{p}{m L^2} \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по t и подставляя (8) находим

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{p}}{m L^2} = - \frac{m g L \sin \varphi}{m L^2} = - \frac{g}{L} \sin \varphi$$

Для малых колебаний ($\sin \varphi \approx \varphi$) получаем решения вида

$$\varphi = c \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t,$$

имеющие период $2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.